1957 г. сентябрь—октябрь *т. XII, вып. 5 (77)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

РЕГУЛЯРНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ И ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

М. И. Вишик и Л. А. Люстерник

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. В настоящей статье исследуются краевые задачи в области Q n-мерного пространства ($n \geqslant 1$) (которые мы будем называть задачами A_ε) — задачи решения линейных дифференциальных уравнений

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = h \tag{0.1}$$

при некоторых условиях $\mathfrak{B}$, заданных на границе Γ области Q; коэффициенты оператора L_ε зависят от параметра ε так, что при $\varepsilon = 0$

коэффициенты при старших производных обращаются в нуль, точнее

$$L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_{1\varepsilon}. \tag{0.2}$$

При $\varepsilon = 0$ задача A_ε превращается в задачу A_0: решение предельного уравнения

$$L_0 w_0 = h, \tag{0.3}$$

полученного при $\varepsilon = 0$ из (0.1) (это уравнение более низкого порядка, чем (0.1)) при соответствующих граничных условиях $\mathfrak{B}_0$, являющихся частью условий $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1$ допредельной задачи A_ε. Решение задачи A_0, вообще говоря, не удовлетворяет условиям $\mathfrak{B}_1$ (при всех условиях $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1$ уравнение (0.3) является переопределенным). Мы ограничимся случаем, когда граничные условия $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1$ означают обращение в нуль решений и их последовательных нормальных производных на границе.

Мы будем говорить, что решение u_0 предельного уравнения имеет невязку в выполнении дополнительных условий задачи A_ε.

Кроме того, решение u_0 предельного уравнения (0.3) часто бывает менее гладким, чем решения u_ε уравнения более высокого порядка (0.1).

Обозначим через $\Omega = \Omega(L_\varepsilon, \mathfrak{B})$ множество функций $u(x)$, определенных в Q и принадлежащих некоторому функциональному пространству, к которым, кроме того, применим оператор L_ε и которые удовлетворяют в определенном смысле граничным условиям $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1$; сам оператор L_ε, действующий в Ω (т. е. L_ε в сочетании с условиями $\mathfrak{B}$), будем обозначать через $\overline{L}_\varepsilon$. Аналогично определяется оператор $\overline{L}_0$, отвечающий задаче A_0. Решение w_0 этой предельной задачи, как следует из сказанного выше, не принадлежит, как правило, области определения Ω оператора $\overline{L}_\varepsilon$.

В целом ряде задач решение u_ε задачи A_ε при малых $\varepsilon > 0$ имеет следующее асимптотическое поведение: $u_\varepsilon - u_0$ заметно отличается от нуля лишь вблизи границы Γ, главная часть этой разности имеет характер так называемого пограничного слоя. Роль такой функции типа погранслоя заключается в том, чтобы компенсировать невязку в выполнении граничных условий $\mathfrak{B}_1$ задачи A_ε у решения w_0 предельной задачи A_0.

Целью настоящей статьи является, во-первых, выделить по возможности широкий класс задач A_ε с малым параметром, у решений которых возникает явление погранслоя (ниже будет выделен такой класс задач — «задачи с регулярным вырождением»); во-вторых, найти по возможности простой и эффективный метод построения погранслоя (для ряда задач этот метод будет сводиться к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами), дать по возможности более точное асимптотическое представление решения u_ε задачи A_ε и для полученных приближенных решений дать оценку остаточных членов и их производных.

2. Уравнения с малым параметром при старших производных возникают во многих задачах физики и механики. Обзор таких задач приведен, например, в статье Фридрихса [1].

Большое число работ в разное время было посвящено обыкновенным линейным уравнениям с малым параметром и системам таких уравнений (см. [2]—[9]) [1]). В основном в этих работах исследовались задачи Коши. При этом существенным образом использовалась специфическая особенность обыкновенных уравнений – наличие конечной фундаментальной системы решений. В центре внимания настоящей статьи стоят краевые задачи уравнений в частных производных. Но начинаем мы с одномерного случая, т. е. с краевых задач для обыкновенных уравнений, на примере которых мы излагаем почти всю методику исследования, которую мы далее переносим на n-мерный случай.

При такой установке мы при исследовании обыкновенных уравнений оставляем в стороне вопросы, насколько можно улучшить полученные результа ы или упростить доказательства при использовании специфических методов теории обыкновенных уравнений.

Переходя к работам по линейным уравнениям в частных производных, укажем прежде всего на работы М. А. Леонтовича и В. А. Фока [10], [11], посвященные асимптотике решений разных задач дифракции. А. А. Гольденвейзер в [12] применял асимптотические методы для исследования тонких упругих оболочек. Вазов в [13] изучил асимптотику решения первой краевой задачи для простейшего эллиптического уравнения внутри области.

Левинсон [14] в двумерном случае исследовал асимптотику решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром ε, вырождающейся при $\varepsilon=0$ в задачу Коши для уравнения первого порядка с регулярным полем характеристик. Им был для этой цели построен пограничный слой вблизи соответствующей части границы. Предельный переход в этой задаче с любым полем характеристик проведен в работе С. Л. Каменомостской [15].

Интерес авторов к уравнениям в частных производных с малым параметром при старших производных возбудили работы О. А. Олейник [16], [17], [18]. Она рассмотрела вопрос о вырождении 2-й и 3-й краевых задач для эллиптического уравнения 2-го порядка с малым параметром. При $\varepsilon=0$ эти задачи переходят в некоторые новые задачи для уравнений 1-го порядка, которые в цитированных работах О. А. Олейник были исследованы и решены. Дэвис методами Левинсона исследовал вырождение распадающегося эллиптического оператора 4-го порядка в эллиптический оператор 2-го порядка [19].

И. С. Градштейн [20] и Б. Н. Панайоти [21] исследовали асимптотику решения задачи Коши для некоторых линейных систем уравнений в частных производных с малым параметром при основных членах [2]).

3. Обычный метод малого параметра заключается в следующем. Дано семейство операторов F_ε вида

$$F_\varepsilon = F_0 + \varepsilon F_1, \tag{0.4}$$

---

[1]) О нелинейных уравнениях с малым параметром, которым посвящена большая литература, мы здесь говорить не будем.

[2]) Ряд вопросов нелинейных уравнений в частных производных с малым параметром освещен в статье О. А. Олейник (УМН **XII**, вып. 3 (1957)).

причем $\Omega(F_0)$ — область определения оператора F_0 — *содержится* в $\Omega(F_1)$ — области определения оператора F_1. Рассматривается решение u_ε уравнения

$$F_\varepsilon u_\varepsilon = (F_0 + \varepsilon F_1)\, u_\varepsilon = h. \tag{0.5}$$

Расщеплению (0.4) отвечает рекуррентный процесс, который получается, если искать приближенное решение уравнения (0.5) в виде многочлена по ε:

$$u_\varepsilon = w_0 + \varepsilon w_1 + \ldots + \varepsilon^n w_n + \varepsilon^{n+1} g_n. \tag{0.6}$$

($\varepsilon^{n+1} g_n$ — остаточный член). Подставляя (0.6) в (0.5) и собирая члены с одинаковыми степенями ε, получаем для определения w_0, w_1, ... рекуррентную систему уравнений:

$$F_0 w_0 = h, \tag{0.7}$$

где w_0 есть решение предельного уравнения, получаемого из (0.5) при $\varepsilon = 0$; далее, при $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$F_0 w_i = -F_1 w_{i-1}. \tag{0.8}$$

Уравнения (0.8) отличаются лишь правой частью от предельного уравнения (0.7).

Из (0.5), (0.6), (0.7) и (0.8) следует:

$$F_\varepsilon(\varepsilon^{n+1} g_n) = F_\varepsilon\Big(u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i\Big) = h - \Big[F_0\Big(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i\Big) + \varepsilon F_1\Big(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i\Big)\Big] =$$

$$= (h - F_0 w_0) - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i (F_0 w_i + F_1 w_{i-1}) - \varepsilon^{n+1} F_1 w_n = -\varepsilon^{n+1} F_1 w_n,$$

откуда

$$F_\varepsilon g_n = -F_1 w_n, \qquad g_n = -F_\varepsilon^{-1}(F_1 w_n). \tag{0.9}$$

Если операторы F_ε обратимы, причем равномерно по ε, т. е. $\|F_\varepsilon^{-1}\| \leqslant C$, то

$$\|\varepsilon^{n+1} g_n\| = O(\varepsilon^{n+1}). \tag{0.10}$$

Однако последнее рассуждение в нашем случае, отвечающем уравнениям (0.1), незаконно, так как область определения операторов $\overline{L}_\varepsilon = F_\varepsilon$ существенно у́же области определения оператора $L_0 = F_0$ и, значит, не выполнено использованное выше требование $\Omega(F_0) \subset \Omega(F_1)$. Конечно, формально этот процесс можно провести, но тогда операторы F_1 и F_ε следует считать совпадающими не с операторами $\overline{L}_{1\varepsilon}$ и $\overline{L}_\varepsilon$, а с некоторыми расширениями этих операторов; обозначим последние через $\widetilde{L}_{1\varepsilon}$ и $\widetilde{L}_\varepsilon$. Эти операторы совпадают с операторами $L_{1\varepsilon}$ и L_ε на функциях, удовлетворяющих только граничным условиям $\mathfrak{B}_0$. При таком истолковании операторов $F_1 = \widetilde{L}_{1\varepsilon}$ и $F_\varepsilon = \widetilde{L}_\varepsilon$ мы можем провести все указанные выкладки, если получающиеся функции w_i — достаточно гладкие. Мы придем к формуле (0.9); однако, так как оператор $F_\varepsilon = \widetilde{L}_\varepsilon$ необратим (он отвечает лишь граничным условиям $\mathfrak{B}_0$ уравнения более низкого порядка), то из формулы (0.9) не следует малость остаточного члена $\varepsilon^{n+1} g_n$, как показывает следующий простейший пример.

Пусть задача A_ε есть решение уравнения

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon u'_\varepsilon + u_\varepsilon = 1 \qquad (L_0 u \equiv u;\ L_{1\varepsilon} u \equiv u')$$

при условии $\mathfrak{B}: u_\varepsilon(0) = 0$. Предельная задача A_0 есть решение уравнения $L_0 u_0 \equiv u_0 = 1$ (условия $\mathfrak{B}_0$ отсутствуют). Очевидно,

$$u_\varepsilon = 1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

Если применить указанный итерационный процесс, то получим $w_0 = 1$, $w_1 = \ldots = w_n = 0$, и сумма $\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i = w_0 \equiv 1$. Очевидно,

$$L_\varepsilon(\varepsilon^{n+1} g_n) = L_\varepsilon\left(u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_n\right) = L_\varepsilon(u_\varepsilon - 1) = 0,$$

в то время, как $\varepsilon^{n+1} g_n = u_\varepsilon - 1 = -e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, и, следовательно, эту разность, хотя бы вблизи точки границы $x = 0$ нельзя считать малой. (В данном случае оператор $\widetilde{L}_\varepsilon$ есть оператор L_ε, примененный к функциям, на которые не накладывается никаких граничных условий, и этот оператор необратим.)

Разность $u_\varepsilon - w_0 = -e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ есть функция типа погранслоя (притом нулевого порядка), компенсирующая невязку в выполнении условия $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$ у функции w_0. Решая аналогичные задачи с малым параметром, мы увидим, что в ряде случаев существенной частью разности $u_\varepsilon - w_0$ являются так называемые функции типа погранслоя k-го порядка $(k \geqslant 0)$, компенсирующие невязки в выполнении условий $\mathfrak{B}_1$ у решений предельных уравнений. Дадим определение функций типа погранслоя.

Пусть $v_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = v_\varepsilon(x)$ — функция, определенная в Q и p раз дифференцируемая. Мы скажем: $v_\varepsilon(x)$ есть функция типа погранслоя k-го порядка $(k < p)$, если:

1) функция $v_\varepsilon(x)$ и ее производные до p-го порядка $(p > k)$ включительно сосредоточены вблизи границы Γ области Q, т. е. эти функции равномерно стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ на любом замкнутом подмножестве Q, не содержащем точек Γ.

2) k-е производные функции $v_\varepsilon(x)$ ограничены в Q при $\varepsilon \to 0$, в то время как среди $(k+1)$-ых производных от v_ε есть функции, стремящиеся к ∞ в отвечающей задаче норме при $\varepsilon \to 0$; j-е производные от v_ε (при $j < k$) стремятся при $\varepsilon \to 0$ к нулю на $\overline{Q}$.

Пример 1. На положительной полуоси типичными примерами функций типа погранслоя (вблизи точки $x = 0$) k-го порядка будут функции

$$\varepsilon^k e^{-\frac{\lambda x}{\varepsilon}}, \qquad \varepsilon^k P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-\frac{\lambda x}{\varepsilon}},$$

где $\lambda > 0$, $P(\xi)$ — многочлен от ξ или, общее, функция, которая вместе со своими p производными растет не быстрее степенной функции при $\xi \to \infty$.

Пример 2. Пусть Q — ограниченная область с гладкой границей, Q_h — часть Q — некоторая полоска вблизи границы Γ, заполненная нормалями (или другими трансверсалями к границе Γ) длины h, $\rho(B)$ — расстояние от точки $B \in Q_h$ до границы Γ по нормали CB (или по трансверсали), $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ — координаты точки $C \in \Gamma$ выхода нормали CB. Функциями типа погранслоя k-го порядка в Q_h будут, например, функции

$$\varepsilon^k \exp\left(-\frac{\lambda(\varphi)\rho}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon^k P\left(\varphi, \frac{\rho}{\varepsilon}\right)\exp\left(-\frac{\lambda(\varphi)\rho}{\varepsilon}\right),$$

где $P(\varphi, \xi)$ — многочлен от ξ с коэффициентами, зависящими от φ или, общее, функция с производными по ξ, растущими не быстрее какой-то степени ξ. Если помножить такую функцию на множитель $\psi_h(\rho)$, равный 1 при $\rho \leqslant \frac{h}{3}$, равный 0 при $\rho \geqslant \frac{2h}{3}$ и имеющий ограниченные производные любого порядка, то получим функцию типа погранслоя во всем Q (если считать ее равной 0 всюду в $Q - Q_h$).

Из приведенного выше анализа следует, что сумма $\sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i$, полученная итерационным процессом, основанным на исходном расщеплении оператора $L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_{1\varepsilon}$, не дает еще асимптотики u_ε во всей области $\overline{Q} = Q + \Gamma$. Следует ожидать, и для ряда задач это оказывается справедливым, что $w_0, w_1, \ldots, w_n$ можно дополнить функциями $v_0, v_1, \ldots$, так, что получается асимптотическое представление

$$u_\varepsilon = (w_0 + \varepsilon w_1 + \ldots + \varepsilon^n w_n) + (v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^N v_N) + z_n \tag{0.11}$$

(где $N \geqslant n$); при этом сумма $u_{n\varepsilon} = \sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i + \sum\limits_{r=0}^{N} \varepsilon^r v_r$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1$, т. е. $u_{n\varepsilon}$, а следовательно, и остаточный член $z_n = u_\varepsilon - u_{n\varepsilon}$ принадлежит области определения оператора $\overline{L}_\varepsilon$; кроме того, функция $\overline{L}_\varepsilon z_n$ должна быть по соответствующей норме величиной порядка ε^{n+1}, и, следовательно, если $\overline{L}_\varepsilon^{-1}$ существуют и равномерно ограничены по норме, то $\| z_n \| = O(\varepsilon^{n+1})$. Для целого ряда краевых задач, например, для первых краевых задач и разных их обобщений при выполнении некоторых условий, гарантирующих равномерную ограниченность $\| L_\varepsilon^{-1} \|$, функции v_i оказываются функциями типа погранслоя.

Суммы $\sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i$ мы получили как приближения к некоторому решению неоднородного уравнения $L_\varepsilon u = h$; суммы $\sum\limits_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i$ естественно искать как приближения к решению однородного уравнения $L_\varepsilon v = 0$. Надо найти другое расщепление оператора L_ε так, чтобы функции v_i получались бы с помощью второго итерационного процесса, основанного на этом расщеплении. Так как мы ожидаем, что этот итерационный процесс будет давать функции типа погранслоя, то естественно расщепление оператора искать вблизи границы Γ области Q, и лишь затем полученные функции v_i с помощью сглаживающих функций типа $\psi_h(\rho)$ распространить на всю область Q. В § 2 это расщепление проведено для случая, когда L_ε есть обыкновенный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами порядка $k+l$, где k – порядок вырожденного оператора L_0:

$$L_0 = \sum_{j=0}^{k} a_j(x)\frac{d^j}{dx^j}, \qquad L_\varepsilon = L_0 + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^r a_{k+r}(x)\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}},$$

и граница Γ состоит из точек $x=0$ и $x=1$.

Заметим, что для стандартных функций типа погранслоя вида $P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)e^{-\frac{\lambda x}{\varepsilon}}$ каждое дифференцирование по x вносит множитель $\frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому главной частью оператора L_ε, примененного к таким функциям, будет $\sum_{r=0}^{l} \varepsilon^r a_{k+r}(x)\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}$. Далее, погранслой, построенный для точки $x=0$, заметно отличен от нуля лишь в малой окрестности этой точки. Поэтому в применении к таким функциям достаточно в качестве главной части оператора L_ε взять оператор

$$\varepsilon^{-k}M_0 = \sum_{r=0}^{l} \varepsilon^r a_{k+r}(0)\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}} = \varepsilon^{-k}\sum_{r=0}^{l} a_{k+r}(0)\frac{d^{k+r}}{dt^{k+r}}, \qquad t=\frac{x}{\varepsilon},$$

т. е. оператор *с постоянными коэффициентами* и с характеристическим уравнением $Q_0(\lambda)=0$. Эти наводящие соображения приводят к расщеплению оператора L_ε, которое проведено в § 2 и имеет вид:

$$L_\varepsilon v = \varepsilon^{-k}[M_0 v + \varepsilon R_1 v + \ldots + \varepsilon^{N+1}R_{N+1}v], \tag{0.12}$$

где $M_0 v = \sum_{r=0}^{l} a_{k+r}(0)\frac{d^{k+r}}{dt^{k+r}}$, а R_i — достаточно просто устроенные линейные дифференциальные операторы. Решение v уравнения $L_\varepsilon v=0$ в первом приближении заменяется решением v_0 уравнения

$$M_0 v_0 = 0 \tag{0.13}$$

с постоянными коэффициентами. Граничные условия для v_0 следует задавать так, чтобы функция w_0+v_0 удовлетворяла условиям $\mathfrak{B}_1$ в точке $x=0$. Это дает k_1 граничных условий в точке $x=0$ для решения v_0. Каждому корню $-\lambda_i$ с отрицательной вещественной частью уравнения $Q_0(\lambda)=0$ отвечает частное решение $\exp(-\lambda_i t)=\exp\left(-\lambda_i\frac{x}{\varepsilon}\right)$ уравнения (0.13) типа погранслоя. Если число таких корней равно k_1, т. е. числу условий $\mathfrak{B}_1$ в точке $x=0$, то мы можем так подобрать произвольные постоянные при частных решениях, чтобы их линейная комбинация v_0 удовлетворяла этим k_1 условиям в точке $x=0$.

Получив таким образом нулевое приближение, мы аналогичным образом с помощью итерационного процесса, основанного на расщеплении (0.12), строим последовательно функции $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ так, что v_i компенсирует невязки в выполнении условий $\mathfrak{B}_1$ у w_i. Такое же построение проводится в точке $x=1$.

Фактически в § 2 оба итерационных процесса объединяются и несколько модифицируются (добавляются, например, к функциям w_i+v_i еще слагаемые $\varepsilon\alpha_i$ так, чтобы $w_i+v_i+\varepsilon\alpha_i$ удовлетворяли всем условиям $\mathfrak{B}_0+\mathfrak{B}_1$). Таким образом, приходим к асимптотике типа (0.11), где $\|z_n\|=O(\varepsilon^{n+1})$.

Мы называем вырождение *регулярным*, если число отрицательных корней соответствующего характеристического уравнения $Q_0(\lambda)=0$ для главной части оператора L_ε в разложении, отвечающем второму итерационному процессу, совпадает с числом условий $\mathfrak{B}_1$ в соответствующей точке границы, т. е. с числом условий, выпадающих при переходе к вырожденной задаче. Именно регулярность вырождения обеспечивает возможность вести второй итерационный процесс, а также то, что он приводит к функциям типа погранслоя. Полученная таким образом асимптотика типа (0.11) показывает, что решения u_ε задачи A_ε вне любой фиксированной окрестности границы стремятся при $\varepsilon \to 0$ к решению w_0 предельной задачи A_0. Напомним, что, для того чтобы обеспечить представление типа (0.11) для решения u_ε задачи A_ε, нам, кроме алгебраического требования регулярности вырождения, нужна еще равномерная ограниченность операторов $\bar{L}_\varepsilon^{-1}$ и достаточная гладкость решений w_i уравнений (0.7), (0.8).

Аналогичные понятия и построения проведены для уравнений в частных производных: в §§ 4—5 для уравнений 2-го порядка, в §§ 6—8 для уравнений высших порядков. Второе расщепление оператора в окрестности границы Г получается, если исходить из таких соображений: для функций типа погранслоя вида $P\left(\varphi, \frac{\rho}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}}$, где ρ — трансверсальная координата, каждое дифференцирование по ρ приводит к появлению множителя $\frac{1}{\varepsilon}$, в то время как дифференцирование по касательному направлению не меняет порядка погранслоя. Далее, так же как в случае обыкновенного уравнения, каждый коэффициент $a(\rho, \varphi_i)$ оператора L_ε заменяем его значением $a(0, \varphi_i)$ в точке $(0, \varphi_i)$ границы. Таким образом, в качестве главной части оператора L_ε появляется в общем случае оператор M_0 — обыкновенный дифференциальный оператор по $t=\frac{\rho}{\varepsilon}$, с коэффициентами — функциями φ_i. Если характеристическое уравнение для этого оператора (в любой точке (φ_i) границы Г) имеет столько корней с отрицательными вещественными частями, сколько условий $\mathfrak{B}_1$ теряется в этой точке, то вырождение задачи A_ε в задачу A_0 называется *регулярным*. В этом случае проходит, как и для обыкновенных уравнений, второй итерационный процесс — строятся функции типа погранслоя $v_0, v_1, \ldots$, которые получаются при помощи решения обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами, и которые компенсируют невязки в выполнении условий $\mathfrak{B}_1$ для функций $w_0, w_1, \ldots$, получаемых первым итерационным процессом; в случае существования и равномерной ограниченности операторов $\bar{L}_\varepsilon^{-1}$ мы приходим к асимптотике типа (0.11).

В §§ 4—5 подробно исследовано вырождение задачи Дирихле для эллиптического уравнения 2-го порядка $L_\varepsilon u = h$ в задачу Коши для уравнения 1-го порядка $L_0 w = h$. Эта задача была впервые подробно рассмотрена в упомянутой работе Левинсона [14], который для построения входящих в асимптотику функций типа погранслоя пользовался нелинейными уравнениями в частных производных 1-го порядка и оценивал остаточные члены в метрике C с помощью принципа максимума.

Если же пользоваться описанной методикой, то погранслой строится с помощью решения обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами и в зависимости от гладкости параметров задачи асимптотика справедлива также и для производных до определенного порядка. Получаются разные виды сходимости решений допредельных задач к решениям предельных задач: оценки остаточных членов получены не только в метрике C, но и в метриках $W_2^{(k)}$. В силу теорем вложения С. Л. Соболева [22] из оценок в среднем в метриках $W_2^{(k)}$ следуют равномерные оценки в соответствующих метриках $C^{(s)}$.

В случае метрик $W_2^{(k)}$ систематически применяются методы, которые в последние годы развивались для исследования краевых задач для эллиптических уравнений, не содержащих параметры, в работах Браудера [23], [24], М. И. Вишика [25], [26], [27], Гординга [28], [29], Фридрихса [30] и других, связанные с изучением квадратичной формы оператора, с применением энергетических неравенств, трансформации Фурье, и т. д., а также используются априорные оценки типа С. Н. Бернштейна [31], [32] и О. А. Ладыженской [33], [34]. Эти методы в дальнейшем переносятся на уравнения высших порядков. Оценки остаточного члена z_n имеют разный характер в окрестности точек касания характеристик с границей Γ, в пограничной полоске и во внутренней подобласти.

В §§ 6—7 подробно изложены вырождения первой краевой задачи для эллиптических уравнений порядка $2(k_1+l_1)$ в такую же задачу для эллиптических уравнений порядка $2k_1$ (раньше, в § 3, аналогичный вопрос исследуется в одномерном случае). Погранслой всегда в этом случае строится как решение обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами. Достаточным условием равномерной обратимости операторов $\bar{L}_\varepsilon$ является *равномерная позитивность их квадратичной формы*. Доказано, что достаточным условием этой равномерной позитивности является *позитивность вырожденного оператора* L_{2k_1} *и положительность вещественной части некоторой обобщенной характеристической формы оператора* L_ε (последнее условие носит чисто алгебраический характер). Отметим, что *оба эти условия являются достаточными и для регулярности вырождения задачи* $A_\varepsilon^{\bar{\varepsilon}}$ *в задачу* A_0.

Эти же связи между позитивностью и регулярностью вырождения можно проследить и для некоторых уравнений нечетного порядка, которые мы назвали *однохарактеристическими*. Уравнение порядка $(2k+1)$ называется *однохарактеристическим* в области Q, если через каждую точку Q проходит одна вещественная и k пар комплексных характеристик этого уравнения. Первая краевая задача для однохарактеристического уравнения порядка $2k+1$ в области Q состоит в решении этого уравнения при k условиях на всей границе Γ для нормальных производных до $(k-1)$-го порядка, и $(k+1)$-м условии для производной k-го порядка на части границы Γ, соответствующей точкам входа или выхода вещественных характеристик. Простейшим примером такой краевой задачи является задача Коши для уравнений 1-го порядка. Для обыкновенных уравнений аналогом такой задачи является граничная задача для уравнения $(2k+1)$-го порядка с $k+1$ условиями в одной точке границы и k — в другой; в § 3 рассмотрены все четыре возможные случая вырождения друг в друга первых краевых задач для уравнений четного и нечетного порядка и во всех четырех случаях аналогичные приведенным выше условия равномерной позитивности операторов L_ε являются достаточными условиями регулярности вырождения.

В § 8 аналогичный факт выявляется для уравнений в частных производных. В § 6—8 приведена общая схема построения асимптотики для всех четырех возможных случаев взаимного вырождения эллиптических и однохарактеристических уравнений. Однако поскольку в общем случае дифференциальные свойства решений, а также подробная теория разрешимости недостаточно исследованы, общие предложения об асимптотике носят условный характер. Подробнее проведена асимптотика вырождения эллиптического уравнения порядка $2l$ в уравнение 1-го порядка, обобщающая рассмотрения §§ 4, 5, и приведены конкретные примеры с асимптотическими разложениями для всех возможных случаев взаимного вырождения эллиптических и однохарактеристических уравнений.

Заметим, что если часть Γ_1 границы Γ является характеристическим многообразием для операторов L_ε или L_0, построение погранслоя усложняется: главная часть оператора L_ε в этом случае может превратиться вблизи Γ_1 в оператор в частных производных, и построение погранслоя указанным выше методом сведется к последовательному решению такого уравнения в частных производных. В § 4 показывается, что построение погранслоя сводится вблизи характеристики к решению параболического уравнения (параболический погранслой); в примерах § 8 построение погранслоя вблизи некоторых частей границы приводится к решению своеобразных граничных задач для уравнений в частных производных.

В случае, если решение w_0 вырожденного уравнения недостаточно гладко или даже разрывно (например, решение задачи Коши для уравнения 1-го порядка), возникает вопрос об асимптотике решения u_ε задачи A_ε вблизи многообразия разрыва $\mathfrak{D}$ функции w_0 или ее производных; в этом случае в окрестности $\mathfrak{D}$ может иметь место асимптотика вида (0.11) для u_ε с функциями v_i типа погранслоя (внутренний погранслой), компенсирующими эти разрывы. Простейший пример внутреннего погранслоя приведен в п. 5 § 6. Е. К. Исакова исследовала внутренний погранслой при вырождении параболического уравнения 2-го порядка в гиперболическое уравнение 1-го порядка.

В § 9 исследована асимптотика собственных функций и собственных значений для самосопряженного эллиптического оператора порядка

$2(k_1+l_1)$ при условиях 1-й краевой задачи, регулярно вырождающегося в такой же оператор порядка $2k_1$. Отметим, что для обыкновенных уравнений первые члены асимптотики, используя функцию Грина, построил В. Б. Гласко [35]. В. Н. Гольдберг [36] для общего класса вырождающихся операторов доказал сходимость в $\mathscr{L}_2$ их собственных элементов и сходимость собственных значений к собственным элементам и значениям вырожденного оператора. Используя методы предыдущих параграфов и применяя аппарат работы [37], мы даем асимптотику типа (0.11) (с погранслоями) для собственных функций оператора L_ε вместе с асимптотикой для собственных значений. Отметим, что В. П. Маслов [38], [39] исследовал ряд вопросов, связанных с асимптотикой собственных функций для дифференциальных операторов при переходе от дискретного к непрерывному спектру.

В § 10 рассмотрен случай параболического уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=L_\varepsilon u$, у которого пространственный оператор L_ε, $\varepsilon=\varepsilon(t)$ вырождается при $t\to\infty$ в оператор более низкого порядка. Сочетание методов предыдущих параграфов с методами заметок авторов [40] и [41] приводит к асимптотике решений смешанной задачи для такого параболического уравнения при больших t. Отметим, что изложенная методика построения погранслоя и асимптотических разложений применима и к другим задачам. В случае других краевых задач для эллиптических уравнений такое исследование проведено Н. М. Леонтович. Такие же явления погранслоя возникают, если предельное уравнение $L_0w=h$ (при $\varepsilon=0$) будет того же порядка, что и допредельное, но теряет часть граничных условий, например, если задача Коши для гиперболического уравнения

$$L_\varepsilon u\equiv\varepsilon^2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=h,$$

$$u\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

вырождается в задачу Коши для параболического уравнения

$$L_0w_0\equiv\frac{\partial w_0}{\partial t}-\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}=h,\quad w_0|_{t=0}=0$$

с потерей граничного условия $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$. Этот вопрос (для смешанной задачи) был исследован Никольским в его дипломной работе.

Как в свое время указал С. Л. Соболев [22], для эллиптических уравнений порядка $2m$ граничные условия первой краевой задачи следует задавать по-разному на компонентах границы разного числа измерений. При вырождении такого уравнения в уравнение более низкого порядка некоторые граничные условия на многообразиях меньшего числа измерений могут пропадать и в их окрестности наблюдаются своеобразные явления внутреннего погранслоя. Исследование этого вопроса проведено Р. М. Гутерман.

Такие же явления могут возникать и при предельном переходе от разностных уравнений к дифференциальным. Например, если для квадрата Q на плоскости (x, y) рассматривается разностный аналог $\Delta_h u_h = 0$ уравнения Лапласа (с шагом h) при граничных условиях $u_h = 0$ на границе Γ квадрата Q и значении $u_h = 1$ в центре Q квадрата. Для предельного уравнения Лапласа $\Delta w_0 = 0$ при граничном условии $w_0 = 0$ на Γ решение $w_0 \equiv 0$ теряет условие в точке 0, вокруг которой u_h имеет характер внутреннего погранслоя. В конце статьи приводятся некоторые, связанные с ее содержанием задачи. Некоторые результаты, содержащиеся в статье, опубликованы в заметках авторов [42], [43].

Мы пользуемся в работе обозначениями:

$$(u, v) = \iint_Q u \cdot v\, dx; \qquad \| u \| = (u, u)^{\frac{1}{2}},$$

$W_2^{(k)}(Q)$ — гильбертово пространство, состоящее из функций $u(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащих $\mathscr{L}_2$ вместе со всеми своими производными до порядка k, с нормой

$$\| u \|^2_{W_2^{(k)}} = \iint_Q \sum_{s=0}^{k} \sum_i \left| \frac{\partial^s u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial^s_{i_s}} \right|^2 dx.$$

$\| \; \|_r$ — норма в некотором банаховом пространстве.

§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Регулярность вырождения

1. Рассмотрим сначала многократно изучавшийся процесс вырождения задачи A_ε, задачи Коши для уравнения $(k+l)$-го порядка, в задачу A_0, задачу Коши для уравнения k-го порядка. Итак, ищем решение уравнения

$$L_0 y \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{d^j y}{dx^j} = 0, \quad a_k \neq 0 \tag{1.1}$$

при начальных значениях

$$\left. \frac{d^i y}{dx^i} \right|_{x=0} = D_i \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{1.2}$$

(задача A_0). Коэффициенты a_j — пока постоянные.

Уравнению (1.1) отвечает характеристическое уравнение

$$P_0(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j \lambda^j = 0. \tag{1.3}$$

Для упрощения изложения мы без оговорок будем предполагать на протяжении этой работы, что характеристические уравнения (1.3), а также ниже определенные дополнительные характеристические уравнения не имеют кратных корней. Случай кратных корней, не представляя принципиальных затруднений, связан с более громоздкими выкладками. Итак, пусть корни $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ уравнения (1.3) попарно различны.

Общее решение уравнения (1.1) имеет вид:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j e^{\mu_j x} \tag{1.4}$$

и поэтому

$$y^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j (\mu_j)^i e^{\mu_j x}. \tag{1.5}$$

Условия (1.2) запишутся так:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j (\mu_j)^i = D_i \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1). \tag{1.6}$$

Это система линейных уравнений относительно c_j с определителем — определителем Вандермонда $W(\mu_1, \ldots, \mu_k)$. Так как в силу сделанного предположения числа μ_i попарно различны, то

$$W(\mu_1, \ldots, \mu_k) \neq 0. \tag{1.7}$$

Решение задачи A_0 обозначим через $y_0(x)$.

Задача A_ε заключается в решении уравнения $(k+l)$-го порядка

$$L_\varepsilon u \equiv L_0 u + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^r a_{k+r} \frac{d^{k+r} u}{dx^{k+r}} = 0\text{[1]}, \tag{1.8}$$

где $\varepsilon > 0$, при граничных условиях

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=0} = D_s \quad (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ k+l-1) \tag{1.9}$$

(т. е., кроме условий (1.2), берется еще l дополнительных условий).

Назовем *дополнительным характеристическим уравнением* для (1.8) уравнение

$$Q_0(\lambda) \equiv \sum_{r=0}^{l} a_{k+r} \lambda^r = 0. \tag{1.10}$$

Пусть корнями этого уравнения будут числа ν_i $(i = 1, \ldots, l)$.

Рассмотрим характеристическое уравнение, отвечающее уравнению (1.8):

$$P_\varepsilon(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j \lambda^j + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^r a_{k+r} \lambda^{k+r} = 0. \tag{1.11}$$

Справедлива

Лемма 1. *Корни уравнения* (1.11) *имеют вид*:

$$\bar{\mu}_i = \mu_i + \varepsilon_i \ (i = 1, \ldots, k) \qquad \text{и} \qquad \frac{\bar{\nu}_r}{\varepsilon} = \frac{\nu_r + \varepsilon_r'}{\varepsilon} \ (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

где ε_i *и* ε_r' *стремятся к нулю вместе с* ε, μ_i — *корни уравнения* (1.3), ν_r — *корни уравнения* (1.10).

Доказательство леммы приведено в конце параграфа.

Как уже оговорено, мы ограничимся случаями, когда числа μ_i и числа ν_r попарно различны.

---

[1]) Задача не усложнилась бы, если бы коэффициенты a_j представляли собой степенные ряды по ε.

Общее решение уравнения (1.8) имеет вид:

$$y_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j e^{\bar{\mu}_j x} + \sum_{r=1}^{l} \tilde{c}_{k+r} e^{\frac{\bar{\nu}_r}{\varepsilon} x}. \tag{1.12}$$

Если один из корней ν_r имеет положительную вещественную часть, то соответствующее частное решение $\exp\left(\frac{\bar{\nu}_i}{\varepsilon} x\right)$ уравнения (1.8) стремится при $\varepsilon \to 0$ к бесконечности для любого $x > 0$.

Мы назовем вырождение задачи A_ε в задачу A_0 *регулярным*, если *вещественные части всех корней* ν_r *уравнения* $Q_0(\lambda) = 0$ *отрицательны*. Условиями этого являются так называемые условия Рауса — Гурвица (см., например, [20], гл. XV).

Пусть имеет место регулярное вырождение. Мы обозначим корни дополнительного характеристического уравнения через $-\lambda_r$ ($\nu_r = -\lambda_r$) ($r = 1, \ldots, l$); им отвечают корни $-\frac{\bar{\lambda}_r}{\varepsilon} = -\frac{\lambda_r - \varepsilon \lambda_r'}{\varepsilon}$ характеристического уравнения для (1.8) и, соответственно, частные решения уравнения (1.8), которые запишем в виде $\varepsilon^k \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_r}{\varepsilon} x\right)$.

Тогда общее решение уравнения (1.8) имеет вид:

$$y_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j \exp(\bar{\mu}_j x) + \sum_{r=1}^{l} \tilde{c}_{k+r} \varepsilon^k \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_r x}{\varepsilon}\right). \tag{1.13}$$

Условия (1.9) теперь можно записать как систему

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j (\bar{\mu}_j)^i + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^{k-i} \tilde{c}_{k+r} (-\bar{\lambda}_r)^i = D_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, k+l-1) \tag{1.14}$$

из $(k+l)$ линейных уравнений относительно $\tilde{c}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, k+l$); первые k уравнений системы (1.14) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j (\bar{\mu}_j)^i + \sum_{r=1}^{l} O(\varepsilon) \tilde{c}_{k+r} = D_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{1.14'}$$

Следующие l уравнений после умножения на ε^α ($\alpha = i - k$) примут вид:

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon^\alpha (\bar{\mu}_j)^{k+\alpha} \tilde{c}_j + \sum_{r=1}^{l} (-\bar{\lambda}_r)^{k+\alpha} \tilde{c}_{k+r} = \varepsilon^\alpha D_{k+\alpha} \tag{1.14''}$$

($\alpha = 0, 1, \ldots, l-1$). При $\varepsilon \to 0$ система (1.14') перейдет в систему (1.6) с определителем $W(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$. Уравнения (1.14'') при $\varepsilon \to 0$ перейдут в уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} (\mu_j)^k c_j + \sum_{r=1}^{l} (-\lambda_r)^k c_{k+r} = D_k \quad \text{при } \alpha = 0, \\ &\sum_{r=1}^{l} (-\lambda_r)^{k+\alpha} c_{k+r} = 0 \quad \text{при } \alpha = 1, 2, \ldots, l-1. \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

Определитель системы (1.6), (1.15) равен

$$B = W(\mu_1, \ldots, \mu_k) \begin{vmatrix} (-\lambda_1)^k \ldots (-\lambda_l)^k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-\lambda_1)^{k+l-1} \ldots (-\lambda_l)^{k+l-1} \end{vmatrix} =$$

$$= W(\mu_1, \ldots, \mu_k) \cdot W(-\lambda_1, \ldots, -\lambda_l) \cdot (\lambda_1 \ldots \lambda_l)^k (-1)^{k \cdot l}.$$

При наших предположениях $\lambda_i \neq 0$, $W(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \neq 0$, $W(\mu_1, \ldots, \mu_k) \neq 0$; следовательно, $B \neq 0$.

Коэффициенты и правые части допредельной системы (1.14′), (1.14″) стремятся при $\varepsilon \to 0$ к соответствующим коэффициентам и правым частям предельной системы (1.6), (1.15). А значит, и определитель B_ε допредельной системы стремится при $\varepsilon \to 0$ к определителю B предельной системы. Следовательно, при достаточно малых ε $B_\varepsilon \neq 0$, система (1.14′), (1.14″) разрешима, и ее решения $\tilde{c}_j$ $(j = 1, \ldots, k+l)$ стремятся к решениям c_j предельной системы: $\tilde{c}_j = c_j + \eta_j$, $\eta_j \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Итак, решение y_ε задачи A_ε равно:

$$y_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j \exp(\bar{\mu}_j x) + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^k \tilde{c}_{k+r} \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_r x}{\varepsilon}\right).$$

Введем обозначения:

$$v_\varepsilon = \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^k \tilde{c}_{k+r} \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_r x}{\varepsilon}\right),$$

$$z_\varepsilon = y_\varepsilon - y_0 - v_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j e^{\bar{\mu}_j x} - y_0(x) = \sum_{j=1}^{k} (c_j + \eta_j) e^{\bar{\mu}_j x} - \sum_{j=1}^{k} c_j e^{\mu_j x} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \eta_j e^{(\mu_j + \varepsilon_j)x} + \sum_{j=1}^{k} c_j e^{\mu_j x} (e^{\varepsilon_j x} - 1).$$

Функция $z_\varepsilon(x)$ стремится при $\varepsilon \to 0$ равномерно к нулю на любом отрезке $[b, a]$, $a > b$, вместе со всеми своими производными.

Функция $v_\varepsilon(x)$ имеет характер погранслоя k-го порядка около точки $x = 0$. Она ограничена вместе со своими производными до k-го порядка включительно; при любом $b > 0$ и $a > b$ она стремится при $\varepsilon \to 0$ равномерно к нулю на отрезке $[b, a]$ вместе со всеми своими производными.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Решение y_ε задачи A_ε представимо в виде*

$$y_\varepsilon(x) = y_0(x) + v_\varepsilon(x) + z_\varepsilon(x), \tag{1.16}$$

где $y_0(x)$ — решение вырожденной задачи A_0; $v_\varepsilon(x)$ — функция типа погранслоя k-го порядка в окрестности точки $x = 0$, а z_ε равномерно на любом отрезке $[b, a]$, $b < a$, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ вместе со всеми своими производными.

2. Рассмотрим сейчас случай, когда задача A_0 есть прежняя задача Коши (1.1), (1.2), а задача A_ε состоит в нахождении решения уравнения

(1.8) на отрезке $[0, 1]$ при прежних k условиях (1.2) и дополнительных l условиях в другой граничной точке $x=1$:

$$\left.\frac{d^r y_\varepsilon}{dx^r}\right|_{x=1} = D_{r1} \quad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ l-1).$$

Общее решение y_ε уравнения (1.8) запишем, заменяя в (1.12) $\tilde{c}_{k+r}$ на $e^{-\frac{\bar{\nu}_r}{\varepsilon}}\tilde{c}_{k+r}$:

$$y_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j \exp \bar{\mu}_j x + \sum_{r=1}^{l} \tilde{c}_{k+r} \exp \frac{\bar{\nu}_r (x-1)}{\varepsilon}.$$

Если для какого-нибудь корня ν_i уравнения (1.10) $\operatorname{Re} \nu_i < 0$, то при достаточно малом ε $\operatorname{Re} \bar{\nu}_i < d_0 < 0$. Частное решение $\exp \frac{\bar{\nu}_i (x-1)}{\varepsilon}$ для любого $x<1$ стремится к ∞ при $\varepsilon \to 0$. Если же все $\operatorname{Re} \nu_i > 0$, то при достаточно малом ε все такие частные решения имеют характер погранслоя вблизи точки $x=1$.

Мы скажем в этом случае: *задача A_ε регулярно вырождается в задачу A_0, если уравнение* (1.10) *имеет все l корней с положительными вещественными частями.* Следует ожидать, что в этом случае решение задачи A_ε имеет тот же вид (1.16), где v_ε на этот раз обозначает функцию типа погранслоя в окрестности точки $x=1$. Мы докажем этот факт в более общем случае.

Итак, пусть теперь задача A_ε есть решение уравнения (1.8) при тех же условиях (1.2) и дополнительных l_1 условиях в точке $x=0$ и $l_2=l-l_1$ условиях в точке $x=1$ $(l_1+l_2=l)$. *Регулярным вырождением задачи A_ε в задачу A_0* мы будем считать вырождение, когда уравнение (1.10) $Q_0(\lambda)=0$ имеет l_1 корней: $-\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \ldots,\ -\lambda_{l_1}$, с отрицательными вещественными частями и l_2 корней: $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{l_2}$, с положительными вещественными частями. Характеристическое уравнение (1.11) имеет корни:

$$\bar{\mu}_i = \mu_i + \varepsilon_i, \qquad -\frac{\bar{\lambda}_r}{\varepsilon} = -\frac{\lambda_r+\varepsilon_r}{\varepsilon}, \qquad \frac{\bar{\nu}_s}{\varepsilon} = \frac{\nu_s+\varepsilon_s}{\varepsilon}$$
$$(i=1,\ \ldots,\ k;\ r=1,\ \ldots,\ l_1;\quad s=1,\ \ldots,\ l_2).$$

Общее решение уравнения (1.8) можно записать в виде

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j e^{\bar{\mu}_j x} + \sum_{r=1}^{l_1} \varepsilon^{k_1} \tilde{c}_{k+r} \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_r x}{\varepsilon}\right) + \sum_{s=1}^{l_2} \varepsilon^{k_2} \tilde{c}_{k+l_1+s} \exp\left(\frac{\bar{\nu}_s (x-1)}{\varepsilon}\right).$$

Сумма $\sum_{r=1}^{l_1} \varepsilon^{k_1} \tilde{c}_{k+r} \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_r x}{\varepsilon}\right)$ представляет собой погранслой k_1-го порядка в окрестности точки $x=0$, причем она обладает l_1 степенями свободы, — их столько, сколько дополнительных условий для задачи A_ε в точке $x=0$. Сумма $\sum_{s=1}^{l_2} \varepsilon^{k_2} \tilde{c}_{k+l_1+s} \exp\left[\frac{\bar{\nu}_s (x-1)}{\varepsilon}\right]$ представляет собой погранслой k_2-го порядка в окрестности точки $x=1$; она обладает l_2 степенями свободы, — их столько, сколько дополнительных условий для задачи A_ε в точке $x=1$.

Мы можем рассчитывать, что решение задачи A_ε по-прежнему можно записать в форме (1.16), где v_ε есть функция типа погранслоя в окрестности точек $x=0$ и $x=1$. Это будет доказано в следующем пункте, при этом мы установим и разрешимость задачи A_ε.

3. Общий случай. Введем обозначения:

$$F_{i0}(u)=\left.\frac{d^iu}{dx^i}\right|_{x=0},\quad F_{i1}(u)=\left.\frac{d^iu}{dx^i}\right|_{x=1}\qquad (i=0,\ 1,\ \ldots).$$

Рассмотрим задачу A_0 для вырожденного уравнения

$$L_0y\equiv\sum_{i=0}^{k}a_i\,y^{(i)}=0 \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$F_{i0}(y)=D_i\qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ k_1-1), \tag{1.17}$$

$$F_{i1}(y)=E_i\qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ k_2-1;\ \ k_1+k_2=k). \tag{1.17'}$$

Мы скажем: задача A_0 — (1.1), (1.17), (1.17′) разрешима, если нуль не является собственным значением оператора L_0 при однородных аналогах условий (1.17), (1.17′), т. е. если эта задача при таких однородных условиях имеет лишь тривиальное решение $y\equiv 0$. В этом случае задача A_0 имеет, и притом единственное, решение при любых D_i и E_i в условиях (1.17), (1.17′).

Пусть μ_i $(i=1,\ \ldots,\ k)$ — корни характеристического для (1.1) уравнения (1.3). Общее решение уравнения (1.1) имеет вид:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{k}c_jw_j,\qquad w_j=\exp\mu_jx. \tag{1.4'}$$

Для того чтобы выполнялись граничные условия (1.17), (1.17′), коэффициенты c_j в (1.4′) должны удовлетворять системе k линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{k}F_{\alpha 0}(w_j)\,c_j=D_\alpha\quad (\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ k_1-1), \tag{1.18}$$

$$\sum_{j=1}^{k}F_{\beta 1}(w_j)\,c_j=E_\beta\quad (\beta=0,\ 1,\ \ldots,\ k_2-1). \tag{1.18'}$$

В случае разрешимости задачи A_0 определитель B_1 этой системы

$$B_1=\left|\begin{matrix}F_{\alpha 0}(w_1)\ldots F_{\alpha 0}(w_k)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_{\beta 1}(w_1)\ldots F_{\beta 1}(w_k)\end{matrix}\right|_{\substack{\alpha=0,1,\ldots,k_1-1\\ \beta=0,1,\ldots,k_2-1}}\neq 0.$$

Рассмотрим теперь задачу A_ε: найти решение уравнения

$$L_\varepsilon u=L_0u+\sum_{r=1}^{l}\varepsilon^r a_{k+r}u^{(k+r)}=0 \tag{1.8}$$

при условиях (1.17), (1.17′) и дополнительных условиях

$$F_{k_1+r,\,0}(u)=D_{k_1+r}\quad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ l_1-1), \tag{1.19}$$

$$F_{k_2+s,\,1}(u)=E_{k_2+s}\quad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ l_2-1). \tag{1.19'}$$

Возьмем дополнительное характеристическое уравнение

$$Q_0(\lambda) = \sum_{r=0}^{l} a_{k+r}\lambda^r = 0. \tag{1.10}$$

Мы скажем: *задача A_ε регулярно вырождается в задачу A_0, если среди корней уравнения* (1.10) *имеется l_1 корней: $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_{l_1}$ с отрицательными вещественными частями, и $l_2 = l - l_1$ корней: $\nu_1, \ldots, \nu_{l_2}$ с положительными вещественными частями.*

Характеристическое уравнение (1.11) имеет в силу леммы 1 корни $\bar{\mu}_i = \mu_i + \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $-\frac{\bar{\lambda}_i}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}(\lambda_i + \varepsilon_i')$ $(i = 1, \ldots, l_1)$, $\frac{\bar{\nu}_j}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(\nu_j + \varepsilon_j'')$ $(j = 1, \ldots, l_2)$. Числа ε_i, ε_i', ε_i'' стремятся к нулю вместе с ε: ε_i, ε_i', $\varepsilon_i'' = o(1)$.

Общее решение уравнения (1.8) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
y_\varepsilon &= \sum_{j=1}^{k+l} \tilde{c}_j \tilde{w}_j,\\
\tilde{w}_j &= \exp(\bar{\mu}_j x) \quad (j = 1, 2, \ldots, k),\\
\tilde{w}_{k+r} &= \varepsilon^{k_1} \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_r x}{\varepsilon}\right) \quad (r = 1, 2, \ldots, l_1),\\
\tilde{w}_{k+l_1+s} &= \varepsilon^{k_2} \exp\left(\frac{\bar{\nu}_s(x-1)}{\varepsilon}\right) (s = 1, 2, \ldots, l_2).
\end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

Теорема 2. *Если вырожденная задача A_0 ((1.1), (1.17), (1.17′)) разрешима и имеет место регулярное вырождение задачи A_ε в задачу A_0, то при достаточно малом ε задача A_ε также разрешима и решение u_ε этой задачи имеет вид*:

$$y_\varepsilon = y_0 + v_\varepsilon + z_\varepsilon. \tag{1.16}$$

Здесь $y_0(x)$ — решение вырожденной задачи A_0; v_ε — функция типа погранслоя (см. ниже формулу (1.25)); *она стремится при $\varepsilon \to 0$ равномерно вместе со всеми своими производными к нулю на любом отрезке, внутреннем к* $[0, 1]$; *функция $z_\varepsilon(x)$ стремится при $\varepsilon \to 0$ равномерно к нулю вместе со всеми своими производными на всем отрезке* $[0, 1]$.

Доказательство. Условия (1.17), (1.17′), (1.19), (1.19′) в силу (1.20) примут вид:

$$\sum_{j=1}^{k+l} F_{\alpha 0}(\tilde{w}_j)\, \tilde{c}_j = D_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, k_1 + l_1 - 1), \tag{1.21}$$

$$\sum_{j=1}^{k+l} F_{\beta 1}(\tilde{w}_j)\, \tilde{c}_j = E_\beta \qquad (\beta = 0, 1, \ldots, k_2 + l_2 - 1). \tag{1.21′}$$

Заметим, что, в силу (1.20) при $\alpha < k_1$ и $r = 1, 2, \ldots, l_1$

$$F_{\alpha, 0}(\tilde{w}_{k+r}) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left[\varepsilon^{k_1} \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_r x}{\varepsilon}\right)\right]_{x=0} = \varepsilon^{k_1 - \alpha}(-\bar{\lambda}_r)^\alpha = O(\varepsilon);$$

далее, при $s = 1, 2, \ldots, l_2$ и любом $\alpha \geqslant 0$

$$F_{\alpha, 0}(\tilde{w}_{k+l_1+s}) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(\varepsilon^{k_2} \exp\left(\frac{\bar{\nu}_s(x-1)}{\varepsilon}\right)\right)_{x=0} = O(\varepsilon). \tag{1.22}$$

Поэтому первые k_1 уравнений (1.21) имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{k} F_{\alpha,\,0}(\widetilde{\omega}_j)\,\widetilde{c}_j+\sum_{r=1}^{l} O(\varepsilon)\,\widetilde{c}_{k+r}=D_\alpha \qquad (\alpha=0,\,1,\,\ldots,\,k_1-1). \tag{1.23}$$

Аналогично, первые k_2 уравнений (1.21′) имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{k} F_{\beta,\,1}(\widetilde{\omega}_j)\,\widetilde{c}_j+\sum_{r=1}^{l} O(\varepsilon)\,\widetilde{c}_{k+r}=E_\beta \qquad (\beta=0,\,1,\,\ldots,\,k_2-1). \tag{1.23′}$$

При $r=1,\,\ldots,\,l_1;\ \gamma\geqslant 0$,

$$F_{k_1+\gamma,\,0}(\widetilde{\omega}_{k+r})=\varepsilon^{k_1}\frac{d^{k_1+\gamma}}{dx^{k_1+\gamma}}\left[\exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_r x}{\varepsilon}\right)\right]_{x=0}=\varepsilon^{-\gamma}(-\bar{\lambda}_r)^{k_1+\gamma}.$$

При $s=1,\,2,\,\ldots,\,l_2,\ \gamma\geqslant 0$, в силу (1.22),

$$F_{k_1+\gamma,\,0}(\widetilde{\omega}_{k+r+s})=O(\varepsilon).$$

Поэтому уравнения (1.21) при $\alpha=k_1+\gamma;\ \gamma=0,\,1,\,\ldots,\,l_1-1$ запишутся после умножения обеих частей ε^γ в виде

$$\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^\gamma F_{k_1+\gamma,\,0}(\widetilde{\omega}_j)\,\widetilde{c}_j+\sum_{r=1}^{l_1}(-\bar{\lambda}_r)^{k_1+\gamma}\widetilde{c}_{k+r}+\sum_{s=1}^{l_2}O(\varepsilon)\,\widetilde{c}_{k+r+s}=$$
$$=\varepsilon^\gamma D_{k_1+\gamma} \qquad (\gamma=0,\,1,\,\ldots,\,l_1-1). \tag{1.23″}$$

Аналогично, уравнения (1.21′) при $\beta=k_2+\delta;\ \delta=0,\,1,\,\ldots,\,l_2-1$ примут вид:

$$\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^\delta F_{k_2+\delta,\,1}(\widetilde{\omega}_j)\,\widetilde{c}_j+\sum_{r=1}^{l_1}O(\varepsilon)\,\widetilde{c}_{k+r}+\sum_{s=1}^{l_2}(\bar{\nu}_s)^{k_2+\delta}\widetilde{c}_{k+l_1+s}=$$
$$=\varepsilon^\delta E_{k_2+\delta} \qquad (\delta=0,\,1,\,\ldots,\,l_2-1). \tag{1.23‴}$$

При $\varepsilon=0$ уравнения (1.23), (1.23′) перейдут в уравнения (1.18), (1.18′) с определителем $B_1\neq 0$. Уравнения (1.23″) перейдут в уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k}F_{k_1,0}(\omega_j)\,c_j+\sum_{r=1}^{l_1}(-\lambda_r)^{k_1}c_{k+r}=D_{k_1} \quad \text{при } \gamma=0,\\ &\sum_{r=1}^{l_1}(-\lambda_r)^{k_1+\gamma}c_{k+r}=0 \qquad \text{при } \gamma=1,\,\ldots,\,l_1-1.\end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

Уравнения (1.23‴) перейдут в уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k}F_{k_2,1}(\omega_j)\,c_j+\sum_{s=1}^{l_2}(\nu_s)^{k_2}c_{k+l_1+s}=E_{k_2} \quad \text{при } \delta=0,\\ &\sum_{s=1}^{l_2}(\nu_s)^{k_2+\delta}c_{k+l_1+s}=0 \quad \text{при } \delta=1,\,\ldots,\,l_2-1.\end{aligned}\right\} \tag{1.24′}$$

Детерминант B предельной системы (1.18), (1.18′), (1.24), (1.24′) равен:

$$B=B_1B_2B_3,$$

где $B_1\neq 0$, $B_2=\left|(-\lambda_r)^{k_1+\gamma}\right|_{\substack{r=1,\,2,\,\ldots,\,l_1\\ \gamma=0,\,1,\,\ldots,\,l_1-1}}\neq 0$, $\quad B_3=\left|\nu_s^{k_2+\delta}\right|_{\substack{s=1,\,\ldots,\,l_2\\ \delta=0,\,1,\,\ldots,\,l_2-1}}\neq 0$.

Поэтому $B\neq 0$.

Коэффициенты и правые части системы (1.23) – (1.23‴) с детерминантом B_ε стремятся при $\varepsilon\to 0$ к коэффициентам и правым частям предельной системы (1.18), (1.18′), (1.24), (1.24′) с детерминантом $B\neq 0$. Значит, при

$\varepsilon \to 0$, $B_\varepsilon \to B \neq 0$. Следовательно, при достаточно малых ε $B_\varepsilon \neq 0$ и задача A_ε разрешима.

Решения $\widetilde{c}_j$ $(j=1, \ldots, k+l)$ системы (1.23) — (1.23‴) стремятся к решениям c_j $(j=1, \ldots, k+l)$ предельной системы (1.18), (1.18′), (1.24), (1.24′):

$$\widetilde{c}_j = c_j + \eta_j, \quad \eta_j \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0 \ (j=1, 2, \ldots, k+l).$$

Итак (см. (1.20)), решение y_ε задачи A_ε имеет вид:

$$y_\varepsilon = \sum_{i=1}^{k+l} (c_i + \eta_i)\, \widetilde{\omega}_i.$$

Введем обозначения.

$$z_\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} (c_i + \eta_i)\, \widetilde{\omega}_i - y_0(x),$$

$$v_\varepsilon = \sum_{r=1}^{l} (c_{k+r} + \eta_{k+r})\, \widetilde{\omega}_{k+r}.$$

Тогда

$$y_\varepsilon = y_0(x) + v_\varepsilon(x) + z_\varepsilon(x).$$

Так как y_0 — решение задачи A_0 — имеет вид:

$$y_0 = \sum_{i=1}^{k_1} c_i \omega_i, \quad \omega_i = e^{\mu_i x},$$

$$\widetilde{\omega}_i = e^{\widetilde{\mu}_i x} = e^{(\mu_i + \varepsilon_i) x} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

то

$$z_\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} \eta_i e^{(\mu_i + \varepsilon_i) x} + \sum_{i=1}^{k} c_i e^{\mu_i x} (e^{\varepsilon_i x} - 1).$$

Поскольку при $\varepsilon \to 0$ $\eta_i \to 0$ и $\varepsilon_i \to 0$, то z_ε при $\varepsilon \to 0$ стремится равномерно на отрезке $[0, 1]$ вместе со всеми своими производными к нулю. Наконец,

$$v_\varepsilon = \sum_{r=1}^{l} (c_{k+r} + \eta_{k+r})\, \widetilde{\omega}_{k+r} = \varepsilon^{k_1} \sum_{r=1}^{l_1} (c_{k+r} + \eta_{k+r}) \exp\left(-\frac{\overline{\lambda}_r x}{\varepsilon}\right) +$$
$$+ \varepsilon^{k_2} \sum_{s=1}^{l_2} (c_{k+l_1+s} + \eta_{k+l_1+s}) \exp \frac{\overline{\nu}_s (x-1)}{\varepsilon}. \tag{1.25}$$

Первая сумма справа в (1.25) при $\varepsilon \to 0$ стремится равномерно к нулю вместе со всеми своими производными на $[0, 1]$ вне любой окрестности точки $x=0$, а вторая сумма — вне любой окрестности точки $x=1$.

Теорема доказана.

Примечание 1. v_ε носит характер погранслоя k_1-го порядка в окрестности точки $x=0$ и k_2-го порядка в окрестности точки $x=1$.

Примечание 2. Теорема осталась бы справедливой, если бы условия (1.19), (1.19′) были заменены условиями:

$$F_{k_1+r,\,0}(y_\varepsilon) = \varepsilon^{-r} D_{k_1+r} \quad (r = 0, 1, \ldots, l_1 - 1),$$
$$F_{k_2+s,\,1}(y_\varepsilon) = \varepsilon^{-s} E_{k_2+s} \quad (s = 0, 1, \ldots, l_2 - 1).$$

Пример 1. В задачах п. 2 вырожденная задача A_0 есть задача Коши, которая разрешима. Если вырождение задачи A_ε в задачу A_0 регулярно, то и задача A_ε разрешима при малых ε и имеет место представление (1.16), описанное в п. 3.

Пример 2. Пусть задача A_0 заключается в решении уравнения

$$L_0 y \equiv y'' = 0$$

при условиях $y(0) = D_1$, $y(1) = E_1$. Так как нуль не является собственным значением оператора $L_0 = \frac{d^2}{dx^2}$ при условиях $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, то задача A_0 разрешима.

Задача A_ε заключается в решении уравнения

$$L_\varepsilon y \equiv -\varepsilon^2 y^{\mathrm{IV}} + \varepsilon 2 a_3 y''' + y'' = 0$$

при прежних двух граничных условиях и дополнительных условиях

$$y'(0) = D_2,\quad y'(1) = E_2.$$

Дополнительное характеристическое уравнение имеет вид:

$$Q_0(\lambda) \equiv -\lambda^2 + 2a_3\lambda + 1 = 0.$$

При любом a_3 оба корня этого уравнения, $-a_3 \pm \sqrt{a_3^2+1}$, — вещественные, — один положительный и один — отрицательный. Условие регулярности выполнено. Задача A_ε разрешима и ее решение имеет вид (1.16), где v_ε — функция типа погранслоя первого порядка в окрестности точек $x = 0$ и $x = 1$.

4. Заметим, что коэффициенты $\tilde{c}_i = c_i(\varepsilon)$, $\tilde{c}_i(0) = c_i$ и показатели $\tilde{\mu}_i = \mu_i(\varepsilon)$, $\tilde{\mu}_i(0) = \mu_i$, $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i(\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}_i(0) = \lambda_i$, $\tilde{\nu}_i = \nu_i(\varepsilon)$, $\tilde{\nu}_i(0) = \nu_i$ (см. (1.23) — — (1.23‴), (1.20)) в нашем случае являются аналитическими функциями ε.

Поэтому в формуле (1.20),

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j \tilde{w}_j = \sum_{j=1}^{k}{}' \tilde{c}_j e^{\tilde{\mu}_j x} = \sum_{j=1}^{k} c_j e^{\mu_j x} + \varepsilon w_1(x) + \ldots + \varepsilon^n w_n(x) + $$
$$+ \varepsilon^{n+1} w_{n+1}(\varepsilon, x) = w_0(x) + \varepsilon w_1(x) + \ldots + \varepsilon^n w_n(x) + \varepsilon^{n+1} w_{n+1}(\varepsilon, x). \quad (1.26)$$

Здесь $w_0(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j e^{\mu_j x}$, $w_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — ограниченные вместе со всеми своими производными функции x, $w_{n+1}(\varepsilon, x)$ ограничена равномерно по ε (для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 — достаточно малая константа) вместе со своими производными по x. Имеем также

$$\sum_{r=1}^{l_1} \tilde{c}_{k+r} \varepsilon^{k_1} e^{-\frac{\tilde{\lambda}_r x}{\varepsilon}} = \varepsilon^{k_1} v_{00} + \varepsilon^{k_1+1} v_{10} + \ldots + \varepsilon^{n+p-1} v_{n+p-1-k_1, 0} + \varepsilon^{n+p} v_{n+p-k_1, 0}, \quad (1.27)$$

где $v_{00} = \sum_{r=1}^{l_1} c_{k+r} e^{-\frac{\lambda_r x}{\varepsilon}}$ — погранслой нулевого порядка в окрестности точки $x = 0$,

$$v_{10} = \sum_{r=1}^{l_1} e^{-\frac{\lambda_r x}{\varepsilon}} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\tilde{c}_{k+r} e^{-\frac{\tilde{\lambda}_r - \lambda_r}{\varepsilon} x} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{r=1}^{l_1} e^{-\frac{\lambda_r x}{\varepsilon}} [d_{k+r} - c_{k+r} \lambda_{r2} x],$$

$$d_{k+r} = \frac{d}{d\varepsilon} (\tilde{c}_{k+r}) \Big|_{\varepsilon=0},\quad \lambda_{r2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2 \tilde{\lambda}_r}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

v_{10} — функция типа погранслоя нулевого порядка в окрестности точки $x=0$. Аналогичное строение имеют функции v_{i0} при $i=2, 3, \ldots$, причем каждое v_{i0} есть сумма многочленов от x i-го порядка, умноженных на $e^{-\frac{\lambda_r x}{\varepsilon}}$; v_{i0} суть «многочлены» типа погранслоя нулевого порядка. Точно так же имеет характер погранслоя и остаточный член $\varepsilon^{n+p}v_{n+p-k1,0}(\varepsilon, x)$. Он является величиной (равномерно по x) порядка ε^{n+p}, а его производная по x j-го порядка есть величина порядка ε^{n+p-j}. Аналогичное разложение будет и у суммы $\sum\limits_{s=1}^{l_2} \widetilde{c}_{k+l_1+s} \exp\left(\frac{\nu_s(x-1)}{\varepsilon}\right)$, и, соединяя его с разложением (1.27), мы получим:

$$v_\varepsilon = \sum_{j=1}^{l} \widetilde{c}_{k+j}\widetilde{w}_{k+j} = \sum_{r=1}^{l_1} \widetilde{c}_{k+r}\varepsilon^{k_1}\exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_r x}{\varepsilon}\right) + \sum_{s=1}^{l_2} \widetilde{c}_{k+r+s}\varepsilon^{k_2}\exp\left(\frac{\bar{\nu}_s(x-1)}{\varepsilon}\right) =$$
$$= \varepsilon^{\bar{k}}v_0 + \varepsilon^{\bar{k}+1}v_1 + \ldots + \varepsilon^{n+p}v_{n+p-\bar{k}}, \tag{1.28}$$

где $\bar{k} = \min(k_1, k_2)$; v_i суть функции типа погранслоя $(k_1 - \bar{k})$-го порядка в окрестности точки $x=0$ и $(k_2 - \bar{k})$-го порядка в окрестности точки $x=1$ и вида, аналогичного функциям v_{00}, $v_{10}, \ldots$ Остаточный член $\varepsilon^{n+r}v_{n+p-\bar{k}}$ является функцией типа погранслоя порядка $k_1 + n + p - \bar{k}$ в окрестности точки $x=0$ и порядка $k_2 + n + p - \bar{k}$ в окрестности точки $x=1$. Этот остаток имеет равномерно на $[0, 1]$ порядок ε^{n+p}, а его j-я производная порядок, на j единиц меньший.

Из (1.26) и (1.28) следует асимптотическое представление решения y_ε задачи A_ε:

$$y_\varepsilon(x) = [w_0 + \varepsilon w_1 + \ldots + \varepsilon^n w_n] + \varepsilon^{\bar{k}}[v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^{n+p-\bar{k}-1}v_{n+p-\bar{k}-1}] + z(\varepsilon, x), \tag{1.28'}$$

где функции $w_i(x)$ ограничены вместе со всеми своими производными; v_i — функции типа погранслоя описанного выше вида; остаток $z(\varepsilon, x) = \varepsilon^{n+1}w_{n+1}(\varepsilon, x) + \varepsilon^{n+p}v_{n+p-\bar{k}}(\varepsilon, x)$ есть величина порядка ε^{n+1} $(p \geqslant 1)$ вместе со своими первыми $p-1$ производными по x; производная же $p-1+j$-го порядка имеет порядок ε^{n+1-j}.

Примечание. При исследовании поведения решения уравнения (1.8) в окрестности точки $x=1$ естественно сделать замену переменного $x_1 = 1 - x$, и тогда уравнение (1.8) примет вид:

$$\sum_{r=0}^{l} (-1)^{k+r}\varepsilon^r a_{k+r}\frac{d^{k+r}y}{dx_1^{k+r}} + \sum_{s=0}^{k-1} a_s(-1)^s\frac{d^s y}{dx_1^s} = 0. \tag{1.29}$$

Граничные условия в точке $x=1$ превратятся в условия в точке $x_1 = 0$. Для уравнения (1.29) дополнительным характеристическим уравнением будет уравнение

$$Q_1(\tau) \equiv \sum_{r=0}^{l} (-1)^{k+r}a_{k+r}\tau^r = 0, \tag{1.30}$$

корни которого отличаются знаком от корней уравнения (1.10): $Q_0(\lambda)=0$. Число l_2 корней последнего уравнения с положительными вещественными частями равно числу корней уравнения (1.30) с отрицательными вещественными частями. Уравнения $Q_0(\lambda)=0$ и $Q_1(\tau)=0$ будем называть дополнительными характеристическими уравнениями в точках $x=0$ и $x=1$ соответственно. Условие регулярности вырождения задачи A_ε в задачу A_0 означает, что *каждое из чисел l_1, l_2 корней с отрицательной вещественной частью дополнительного характеристического уравнения в граничных точках соответственно $x=0$ и $x=1$ совпадает с числом граничных условий* (1.19), (1.19′) *в каждой из этих точек для задачи A_ε, выпадающих при переходе к предельной задаче A_0*. Такое определение регулярности вырождения в следующем параграфе будет перенесено на обыкновенные уравнения с переменными коэффициентами, а в дальнейшем — на уравнения в частных производных.

Доказательство леммы 1. Пусть уравнение (1.3): $P_0(\mu)\equiv\sum\limits_{j=0}^{k}a_j\mu^j$ имеет корни $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ (корни могут быть и кратными); пусть $\mu_i=\mu_{i+1}=\ldots$ $\ldots=\mu_{i+p-1}=\mu$ — корень кратности p этого уравнения и пусть $S_\alpha(\mu)$ обозначает окружность радиуса $\alpha>0$ вокруг точки μ. При достаточно малом α внутри $S_\alpha(\mu)$, кроме μ, нет других корней уравнения (1.3). Тогда логарифмический вычет P_0 по S_α равен p: $B_{S_\alpha}(P_0)=p$. Многочлены $P_\varepsilon(\mu)=\sum\limits_{j=0}^{k}a_j\mu^j+$ $+\sum\limits_{r=1}^{l}a_{k+r}\varepsilon^r\mu^{k+r}$ стремятся при $\varepsilon\to 0$ равномерно на S_α к многочлену $P_0(\mu)$ и потому логарифмический вычет P_ε: $B_{S_\alpha}(P_\varepsilon)\to B_{S_\alpha}(P_0)=p$. Но так как логарифмический вычет есть число целое, то при достаточно малых $\varepsilon>0$ $B_{S_\alpha}(P_\varepsilon)=p$. Но тогда внутрь S_α попадут ровно p корней (в смысле суммы кратности) уравнения $P_\varepsilon(\mu)=0$, которые мы обозначим через $\bar\mu_i, \bar\mu_{i+1}, \ldots$ $\ldots, \bar\mu_{i+p-1}$. Отсюда

$$|\bar\mu_{i+j}-\mu_{i+j}|=|\bar\mu_{i+j}-\mu|<\alpha \quad (j=0, 1, \ldots, p-1).$$

Так как $\alpha>0$ можно выбрать произвольно малым, то отсюда следует, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bar\mu_{i+j}=\mu_{i+j}$ $(j=0, 1, \ldots, p-1)$. Аналогичные соотношения имеют место для всех корней $\bar\mu_i$: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bar\mu_i=\mu_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$.

Если умножить уравнение $P_\varepsilon(\mu)=0$ на ε^k и сделать замену $\varepsilon\mu=\nu$, то получим:

$$\varepsilon^k P_\varepsilon(\mu)\equiv\sum_{r=0}^{l}a_{k+r}\nu^{k+r}+\varepsilon a_{k-1}\nu^{k-1}+\ldots+\varepsilon^k a_0=0. \tag{1.31}$$

Обозначив через $\nu_1, \ldots, \nu_l$ отличные от нуля корни уравнения

$$\nu^k Q_0(\nu)\equiv\sum_{r=0}a_{k+r}\nu^{k+r}=0, \tag{1.32}$$

получим, как выше, что уравнение (1.31) имеет корни $\bar{\nu}_1(\varepsilon), \ldots, \bar{\nu}_l(\varepsilon)$, сколь угодно мало отличающиеся от $\nu_1, \ldots, \nu_l$:

$$\bar{\nu}_r(\varepsilon) - \nu_r = \varepsilon_r', \quad \varepsilon_r' \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, уравнение (1.31) имеет корни

$$\bar{\mu}_{k+r}(\varepsilon) = \frac{\bar{\nu}_r(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\nu_r + \varepsilon_r'}{\varepsilon} \qquad (r = 1, \ldots, l).$$

При достаточно малом ε конечные корни $\bar{\mu}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ не могут равняться корням $\bar{\mu}_{k+r} = \frac{\bar{\nu}_r(\varepsilon)}{\varepsilon}$ $(r = 1, \ldots, l)$, и эти $k + l$ корней исчерпывают все корни уравнения $P_\varepsilon(\mu) = 0$. Лемма доказана.

§ 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Основной итерационный процесс

1. В предыдущем параграфе мы пришли к асимптотическим представлениям (1.16) и (1.28′) решений задачи A_ε в случае ее регулярного вырождения. Эти представления вытекали из формул (1.4) и (1.20), с помощью которых явно выражались решения как вырожденной задачи A_0, так и невырожденной задачи A_ε. Такие представления имеют место во многих задачах, связанных с соответствующим обобщением понятия «регулярного вырождения».

При отсутствии явных выражений для решений задач A_ε и A_0 мы будем пользоваться некоторыми рекуррентными процессами. Мы опишем эти процессы на примере обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и перенесем их на случай уравнений в частных производных.

Определим теперь линейные операторы L_ε и L_0, действующие на достаточно гладкие функции $u(x)$ переменного x, определенные на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$L_0 u \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j(x) \frac{d^j u}{dx^j}, \quad a_k(x) \neq 0 \text{ при } x \in [0, 1], \tag{2.1}$$

$$L_\varepsilon u \equiv L_0 u + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^r a_{k+r}(x) \frac{d^{k+r} u}{dx^{k+r}}, \quad \varepsilon > 0, \quad a_{k+r}(x) \neq 0 \text{ при } x \in [0, 1]. \tag{2.2}$$

Будем считать коэффициенты $a_j(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, k + l)$ достаточное число раз дифференцируемыми[1]). Разложения этих коэффициентов в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ с остаточным членом $(N + 1)$-го порядка дают нам:

$$a_j(x) = a_{j0} + \sum_{s=1}^{N} a_{j,s,0} x^s + a_{j,N+1,0}(x)\, x^{N+1} \tag{2.3}$$

[1]) Легко подсчитать, наличие скольких производных у коэффициентов $a_j(x)$ достаточно для проведения нижеследующих выкладок.

и, если положить $x_1 = 1 - x$,

$$a_j(x_1) = a_{j1} + \sum_{s=1}^{N} a_{j,s,1} x_1^s + a_{j,N+1,1}(x_1)\, x_1^{N+1}. \tag{2.3'}$$

Здесь $a_{j0} = a_j(x)|_{x=0}$, $a_{j1} = a_j(x)|_{x=1}$.

Задача A_0 заключается в решении уравнения

$$L_k w = h(x) \tag{2.4}$$

при граничных условиях

$$\left.\frac{d^i w}{dx^i}\right|_{x=0} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, k_1 - 1), \tag{2.5}$$

$$\left.\frac{d^j w}{dx^j}\right|_{x=1} = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, k_2 - 1;\ k_2 = k - k_1). \tag{2.5'}$$

Задача A_ε заключается в решении уравнения

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = h(x) \tag{2.6}$$

при граничных условиях (2.5), (2.5′) и дополнительных условиях

$$\left.\frac{d^{k_1+r} u_\varepsilon}{dx^{k_1+r}}\right|_{x=0} = 0 \quad (r = 0, 1, \ldots, l_1 - 1), \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{d^{k_2+s} u_\varepsilon}{dx^{k_2+s}}\right|_{x=1} = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, l_2 - 1;\ l_2 = l - l_1). \tag{2.7'}$$

Можно было бы граничные условия взять неоднородными, но этот случай обычными методами свелся бы к случаю однородных условий.

Функцию $h(x)$ будем считать достаточное число раз дифференцируемой. Мы считаем задачу A_0 разрешимой, т. е. предполагаем что нуль не является собственным значением оператора L_k при граничных условиях (2.5), (2.5′). Будем считать задачи A_ε при достаточно малых ε разрешимыми, не входя в разбор вопросов о связи разрешимости задач A_0 и A_ε, как это было сделано в § 1.

Поскольку функция v_ε в разложении (1.16) — типа погранслоя, т. е. заметно отличается от нуля лишь в окрестностях граничных точек $x = 0$ и $x = 1$, то естественно, что при определении аналогичной функции в нашем случае мы можем в первом приближении считать в уравнении (2.6) коэффициенты $a_j(x)$ постоянными, равными соответственно $a_{j0} = a_j(0)$ в окрестности точки $x = 0$ и $a_{j1} = a_j(1)$ в окрестности точки $x = 1$. Фигурировавшее в предыдущем параграфе дополнительное характеристическое уравнение в точках $x = 0$ и $x = 1$ вводится и в нашем случае, именно это уравнение в точке $x = 0$:

$$Q_0(\lambda) = \sum_{r=0}^{l_1} a_{k_1+r,0} \lambda^r = 0, \tag{2.8}$$

в точке $x = 1$:

$$Q_1(\mu) = \sum_{s=0}^{l_2} (-1)^{k+s} a_{k_2+s,1} \mu^s = 0. \tag{2.8'}$$

Мы перенесем на наш случай и определение регулярности вырождения: *вырождение задачи A_ε в задачу A_0 — регулярное, если число корней (с отри-*

цательной вещественной частью) характеристических уравнений (2.8) (*в точке* $x=0$) *и* (2.8′) (*в точке* $x=1$) *совпадает соответственно с* l_1 *и* l_2, *т. е. с числом граничных условий* (2.7) *и* (2.7′) *в этих точках, выпадающих при переходе от* A_ε *к* A_0. Смысл регулярности вырождения состоит в том, что функции типа погранслоя в окрестности граничных точек, аналогичные функциям v_0, v_1, ... в формуле (1.28′), которые мы будем последовательно строить, имеют столько степеней свободы, сколько невязок в выполнении граничных условий (2.7), (2.7′) они должны компенсировать.

Оператор L_ε представим в виде (2.2) как многочлен от ε. Мы приведем другое его представление в окрестности точки $x=0$. Именно, введем новую переменную $t=\frac{x}{\varepsilon}$, $x=\varepsilon t$. Тогда формула (2.3) запишется в виде:

$$a_j(x)=a_{j0}+\sum_{s=1}^{N} a_{j,s,0}\varepsilon^s t^s+\varepsilon^{N+1}a_{j,N+1,0}(x)\,t^{N+1}.$$

Для $j<k$ достаточно представить $a_j(x)$ в виде

$$a_j(x)=a_{j0}+\sum_{s=1}^{N+j-k} a_{j,s,0}\varepsilon^s t^s+\varepsilon^{N+1+j-k}a_{j,N+1+j-k,0}(x)\,t^{N+1+j-k}. \tag{2.3″}$$

Далее, $\frac{d}{dx}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{dt}$, $\frac{d^j}{dx^j}=\varepsilon^{-j}\frac{d^j}{dt^j}$. Значит,

$$\varepsilon^k L_\varepsilon u=\sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon^k a_j(x)\frac{d^ju}{dx^j}+\sum_{r=0}^{l}\varepsilon^{k+r}a_{k+r}(x)\frac{d^{k+r}u}{dx^{k+r}}=$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon^{k-j}a_j(x)\frac{d^ju}{dt^j}+\sum_{r=0}^{l}a_{k+r}(x)\frac{d^{k+r}u}{dt^{k+r}}.$$

Отсюда в силу (2.3) (при $j\geqslant k$) и (2.3″) (при $j<k$), объединяя члены при одинаковых степенях ε, получаем:

$$\varepsilon^k L_\varepsilon u=M_0u+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^j R_j u+\varepsilon^{N+1}R_{N+1}u. \tag{2.9}$$

Здесь

$$M_0u=\sum_{r=0}^{l}a_{k+r,0}\frac{d^{k+r}u}{dt^{k+r}}$$

— линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами;

$$R_1u=\sum_{r=0}^{l}ta_{k+r,1,0}\frac{d^{k+r}u}{dt^{k+r}}+a_{k-1,0}\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}},$$

и, вообще, при $1\leqslant i\leqslant N$, R_iu есть линейный дифференциальный оператор с коэффициентами — степенями t не выше i; R_{N+1} есть линейный дифференциальный оператор, каждый из коэффициентов которого является произведением ограниченной функции (типа $a_{j,N+1,0}(x)$) на степень t (не выше $N+1$).

Аналогичное расщепление оператора L_ε можно произвести в окрестности точки $x=1$ (т. е. $x_1=1-x=0$), с использованием замены переменных

$t_1=\frac{x_1}{\varepsilon}=\frac{1-x}{\varepsilon}$ и разложений (2.3′):

$$\varepsilon^k L_\varepsilon u = M_1 u + \sum_{j=1}^{N+1} \varepsilon^j R_{j1} u, \tag{2.10}$$

$$M_1 u = \sum_{r=0}^{l} (-1)^{k+r} a_{k+r,\,1} \frac{d^{k+r}u}{dt_1^{k+r}}, \tag{2.10′}$$

R_{i1} — операторы, аналогичные соответствующим операторам R_i, $1 \leqslant i \leqslant N+1$. Главными частями оператора $L_\varepsilon u$ в окрестности точек 0 и 1 будут соответственно операторы $\varepsilon^{-k}M_0$, $\varepsilon^{-k}M_1$, т. е. линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Для дифференциальных уравнений

$$M_0 u \equiv \sum_{r=0}^{l} a_{k+r,\,0} \frac{d^{k+r}u}{dt^{k+r}} = 0, \tag{2.11}$$

$$M_1 u \equiv (-1)^k \sum_{r=0}^{l} (-1)^r a_{k+r,\,1} \frac{d^{k+r}u}{dt_1^{k+r}} = 0 \tag{2.11′}$$

характеристические уравнения (в силу (2.8) и (2.8′)) запишутся соответственно в виде

$$\lambda^k Q_0(\lambda) = 0, \tag{2.12}$$

$$\mu^k Q_1(\mu) = 0. \tag{2.12′}$$

Корни этих уравнений, отличные от нуля, совпадают с корнями уравнений (2.8) и (2.8′).

Мы опишем рекуррентный процесс, дающий асимптотическое представление вида (1.28′) решения u_ε задачи A_ε. Мы его опишем сначала для случая, когда задачи A_0 и A_ε суть задачи Коши — все k условий задачи A_0 и l дополнительных условий задачи A_ε заданы в точке $x=0$, т. е. когда в (2.5) $k_1=k$ и в (2.7) $l_1=l$; $k_2=l_2=0$, т. е. условия (2.5′) и (2.7′) отсутствуют.

Решение уравнения $L_\varepsilon u_\varepsilon = h$ при условиях (2.5) и (2.7) ($k_1=k$, $l_1=l$) можно представить как сумму одного из решений $\overline{w}$ уравнения

$$L_\varepsilon \overline{w} = h \tag{2.13}$$

и решения однородного уравнения

$$L_\varepsilon \overline{v} = 0 \tag{2.13′}$$

такого, что $\overline{w}+\overline{v}$ удовлетворяет граничным условиям (2.5), (2.7).

В первом приближении¹) уравнение (2.13) заменяется уравнением (2.4)

$$Lw = h,$$

и если потребовать от w выполнения граничных условий (2.5), получим: $w=w_0$, где w_0 — решение задачи A_0.

Но для w_0 не выполнены граничные условия (2.7).

---

¹) Если решение $\overline{w}$ искать в виде $\overline{w}=w+\varepsilon w_1+\dots$

В качестве первого приближения к решению $\bar{v}$ уравнения (2.13′)[1] возьмем решение уравнения (2.11): $M_0 v_0 = 0$, потребовав, чтобы v_0 компенсировало невязки для w_0 в выполнении условий (2.7), т. е. чтобы

$$\left.\frac{d^{k+r}(w_0+v_0)}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} = 0 \quad (r = 0, 1, \ldots, l-1)$$

или чтобы имели место условия:

$$\left.\frac{d^{k+r}v_0}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} = -\left.\frac{d^{k+r}w_0}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} \quad (r = 0, \ldots, l-1). \tag{2.14}$$

При этом естественно потребовать, чтобы *это решение имело характер погранслоя.*

Требование регулярности вырождения означает в нашем случае, что дополнительное характеристическое уравнение (2.8) имеет ровно $l = l_1$ корней: $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_l$, с отрицательными вещественными частями. Числа $-\lambda_i$ являются корнями характеристического уравнения (2.12) для дифференциального уравнения (2.11). Предположим, как мы это делали выше, для простоты, что числа $-\lambda_i$ — попарно различные. Каждому из них отвечает частное решение

$$v = \exp(-\lambda_i t) = \exp\left(-\frac{\lambda_i x}{\varepsilon}\right)$$

уравнения (2.11). Требование, чтобы решение уравнения (2.11) имело характер погранслоя в окрестности точки $x = 0$, эквивалентно в нашем случае требованию

$$v|_{t=\infty} = 0.$$

Общим решением типа погранслоя уравнения (2.11) будет:

$$\sum_{i=1}^{l} c_i \exp(-\lambda_i t) = \sum_{i=1}^{l} c_i \exp\left(-\frac{\lambda_i x}{\varepsilon}\right). \tag{2.15}$$

Оно содержит столько же произвольных постоянных c_i, сколько граничных условий (2.7) задачи A_ε выпадает при переходе к вырожденной задаче A_0. Мы будем искать решение уравнения (2.11) типа погранслоя k-го порядка в виде

$$v_0 = \varepsilon^k \bar{v}_0 = \varepsilon^k \sum_{i=1}^{l} c_i \exp(-\lambda_i t) = \varepsilon^k \sum_{i=1}^{l} c_i \exp\left(-\frac{\lambda_i x}{\varepsilon}\right) \tag{2.15′}$$

так, чтобы

$$w_0 + v_0 = w_0 + \varepsilon^k \bar{v}_0$$

удовлетворяло условиям (2.7). Получаем l условий (2.14):

$$\left.\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}(w_0 + \varepsilon^k \bar{v}_0)\right|_{x=0} = 0 \quad (r = 0, 1, \ldots, l-1),$$

т. е.

$$\left.\frac{d^{k+r}\bar{v}_0}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} = -\varepsilon^{-k}\left.\frac{d^{k+r}w_0}{dx^{k+r}}\right|_{x=0}$$

[1]) Если это решение $\bar{v}$ искать в виде $\bar{v} = v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots$

или

$$\left.\frac{d^{k+r}\bar{v}_0}{dt^{k+r}}\right|_{t=0} = \varepsilon^{k+r}\left.\frac{d^{k+r}\bar{v}_0}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} = -\varepsilon^{r}\left.\frac{d^{k+r}w_0}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} \quad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ l-1). \tag{2.16}$$

Подставляя в (2.16) $\bar{v}_0 = \sum_{i=1}^{l} c_i \exp(-\lambda_i t)$, получаем систему l линейных уравнений относительно l неизвестных c_i $(i=1,\ \ldots,\ l)$:

$$\sum_{i=1}^{l}(-\lambda_i)^{k+r}c_i = -\varepsilon^{r}\left.\frac{d^{k+r}w_0}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} \quad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ l-1). \tag{2.17}$$

Детерминант этой системы (типа Вандермонда) при сделанных нами предположениях о попарном неравенстве чисел λ_i отличен от нуля. Отсюда находим решения c_i системы (2.17). При $\varepsilon=0$ эта система переходит в систему

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{l}(-\lambda_i)^{k}c_{i0} = -\left.\frac{d^k w_0}{dx^k}\right|_{x=0}, \\ &\sum_{i=1}^{l}(-\lambda_i)^{k+s}c_{i0} = 0 \quad (s=1,\ \ldots,\ l-1). \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Определяемые из (2.17) числа c_i отличаются от определяемых из (2.18) чисел c_{i0} на величину порядка $O(\varepsilon)$: $c_i = c_{i0} + O(\varepsilon)$, точнее $c_i = c_{i0} + \sum_{s=1}^{l-1} d_s \varepsilon^s$, где d_s — константы. (Можно было бы уточнить наше расщепление, разлагая в выражении (2.15) коэффициенты c_i по степеням ε, но мы этого делать не будем.)

Сумма $w_0 + v_0 = w_0 + \varepsilon^k \bar{v}_0$ удовлетворяет граничным условиям (2.7), но v_0, а значит и $w_0 + v_0$, уже не удовлетворяет условиям (2.5). Для того чтобы компенсировать невязку в выполнении этих условий, введем функцию

$$\varepsilon\alpha_0 = -\varepsilon^k \sum_{i=1}^{l} c_i \left[1 + (-\lambda_i t) + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}(-\lambda_i t)^{k-1}\right] =$$

$$= -\varepsilon \sum_{i=1}^{l} c_i \left[\varepsilon^{k-1} - \varepsilon^{k-2}\lambda_i x + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}(-\lambda_i x)^{k-1}\right].$$

α_0 есть многочлен степени меньше k от x (или t); поэтому условия (2.7) для него автоматически выполняются. С другой стороны, для

$$v_0 + \varepsilon\alpha_0 = \varepsilon^k \sum_{i=1}^{l} c_i \left[\exp(-\lambda_i t) - \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-\lambda_i t)^s}{s!}\right]$$

выполняются k условий (2.5). Значит, сумма

$$w_0 + v_0 + \varepsilon\alpha_0$$

удовлетворяет всем $k+l$ условиям (2.5), (2.7).

Построим следующие приближения к решению u_ε задачи A_ε, **исходя** из найденного приближения.

Ищем их в виде

$$u_\varepsilon = (w_0 + \varepsilon w_1 + \ldots + \varepsilon^m w_m) + (v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^N v_N) + \\ + \varepsilon(\alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \ldots + \varepsilon^N \alpha_N) + z_m, \quad v_j = \varepsilon^k \bar{v}_j,$$

где z_m — невязка. Имеем в силу (2.2) и (2.9)

$$h = L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \Big\{\Big(L_k + \sum_{s=1}^{l} \varepsilon^s L_{k+s}\Big)\Big[\Big(w_0 + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j w_j\Big) + \varepsilon\Big(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \alpha_j\Big)\Big]\Big\} + \\ + \Big\{\varepsilon^{-k}\Big(M_0 + \sum_{s=1}^{N+1} \varepsilon^s R_s\Big)\Big(v_0 + \sum_{r=1}^{N} \varepsilon^r v_r\Big)\Big\} + L_\varepsilon z_m; \quad (2.19)$$

вторую фигурную скобку, полагая $v_r = \varepsilon^k \bar{v}_r$, можно записать в виде

$$\Big(M_0 + \sum_{s=1}^{N+1} \varepsilon^s R_s\Big)\Big(\bar{v}_0 + \sum_{r=1}^{N} \varepsilon^r \bar{v}_r\Big), \quad (2.20)$$

где w_0, v_0 и α_0 уже нам известны, причем $L_k w_0 = h$, $M_0 v_0 = 0$ и $w_0 + \varepsilon^k \bar{v}_0 + + \varepsilon\alpha_0$ удовлетворяет всем граничным условиям задачи A_ε.

Предположим, что мы уже построили w_j, v_j, α_j для $0 \leqslant j \leqslant i-1$, и что для них выполнены следующие гипотезы индукции:

1) w_j и α_j — ограниченные на $[0, 1]$ функции вместе со своими производными до определенного порядка.

2) $v_j = \varepsilon^k \bar{v}_j$ носит характер погранслоя k-го порядка в окрестности точки $x = 0$, точнее:

$$v_j = \varepsilon^k \bar{v}_j = \varepsilon^k \sum_{i=1}^{l} c_{ij} \exp(-\lambda_i t), \quad (2.21)$$

где c_{ij} — *многочлены относительно* t.

3) $w_j + \varepsilon\alpha_j + v_j$ удовлетворяет всем граничным условиям задачи A_ε, т. е. условиям (2.5) и (2.7).

Объединим в первой фигурной скобке (2.19) все члены при ε^i $(i > 0)$ и приравняем их нулю. Получим

$$L_k w_i = -\sum_{s=1}^{[i]} L_{k+s} w_{i-s} - \sum_{p=0}^{[i-1]} L_{k+p} \alpha_{i-p-1}. \quad (2.22)$$

Здесь $[i]$ означает $\min(i, l)$. Берем решение w_i этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (2.5) задачи A_0. Аналогично, объединяя во второй фигурной скобке члены при ε^i и приравнивая их нулю, получим:

$$M_0 \bar{v}_i = -\sum_{s=1} R_s \bar{v}_{i-s}. \quad (2.23)$$

В качестве $\bar{v}_i$ возьмем то решение уравнения (2.23), которое: во-первых, есть функция типа погранслоя в окрестности точки $x = 0$ и, значит, $v_i = \varepsilon^k \bar{v}_i$ — погранслой k-го порядка, во-вторых, $v_i + w_i$ удовлетворяет условиям (2.7), т. е. v_i удовлетворяет l условиям, аналогичным (2.16):

$$\left.\frac{d^{k+r}\bar{v}_i}{dt^{k+r}}\right|_{t=0} = -\varepsilon^r \left.\frac{d^{k+r} w_i}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} \quad (r = 0, \ldots, l-1). \quad (2.24)$$

Такое решение $\bar{v}_i$ можно найти в виде $\bar{v}_i = p_i(t) + q_i(t)$, где $p_i(t)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (2.23); $q_i(t)$ есть решение соответствующего однородного уравнения (2.11). Напомним, что в силу условия 2) (см. (2.21)) все функции v_{i-s} $(s > 0)$ имеют форму линейной комбинации от $\exp(-\lambda_j t)$ с коэффициентами — многочленами по t. В операторах R_s $(s=1, \ldots, i)$ коэффициенты при дифференциальных операторах $\frac{d^j}{dt^j}$ — тоже многочлены по t. Поэтому правая часть (2.23) имеет вид: $\sum B_j \exp(-\lambda_j t)$, где $B_j = B_j(t)$ — тоже многочлен от t. Мы можем найти решение $p_i(t)$ уравнения (2.23) также в форме $\sum C_j(t) \exp(-\lambda_j t)$, где $C_j(t)$ — многочлен от t степени, на единицу большей чем $B_j(t)$, который отыскивается методом подбора коэффициентов. Далее, $q_i(t)$ находится как решение уравнения (2.11) при граничных условиях

$$\left.\frac{d^{k+r}q_i}{dt^{k+r}}\right|_{t=0} = -\varepsilon^r \left.\frac{d^{k+r}w_i}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} - \left.\frac{d^{k+r}p_i}{dt^{k+r}}\right|_{t=0} \tag{2.24'}$$

с тем, чтобы $\bar{v}_i = p_i + q_i$ удовлетворяла условиям (2.24). Функция q_i имеет вид (2.15), а значит, $v_i = \varepsilon^k \bar{v}_i = \varepsilon^k (p_i + q_i)$ имеет вид (2.21).

Найдя v_i, строим теперь функцию $\varepsilon\alpha_i$ в виде многочлена $(k-1)$-й степени по t (так же, как мы выше строили $\varepsilon\alpha_0$) с тем, чтобы функция

$$w_i + v_i + \varepsilon\alpha_i = w_i + \varepsilon^k \bar{v}_i + \varepsilon\alpha_i$$

удовлетворяла всем условиям (2.5) и (2.7).

Итак, наш рекуррентный процесс сводится к последовательному решению уравнений k-го порядка (2.22), отличающихся лишь правыми частями от вырожденного уравнения (2.4), и к решению уравнений (2.23) с постоянными коэффициентами. При этом процессе сохраняются все предположения индукции. Мы можем предположить в нашем случае $N = m$. Обрывая процесс на m-ом шаге, мы добьемся, что в формуле (2.20) погасятся все члены при ε^s для $s = 0, 1, \ldots, m$, как в первой, так и во второй фигурных скобках. Следовательно, в нашем случае будет:

$$h = L_\varepsilon u_\varepsilon = h + \varepsilon^{m+1} g_m + L_\varepsilon z_m, \tag{2.25}$$

где $\varepsilon^{m+1} g_m$ есть сумма конечного числа членов при ε^{m+s}, $s \geqslant 1$. Итак,

$$L_\varepsilon z_m = -\varepsilon^{m+1} g_m. \tag{2.26}$$

Отсюда нам надо вывести, что в известном смысле z_m мало и имеет порядок малости ε^{m+1}. Для того чтобы говорить о «малости» некоторой функции, обычно рассматривают ее как элемент некоторого банахова пространства B_2, естественно связанного с задачей, и тогда малость функции z_m означает малость ее нормы $\|z_m\|_2$ в B_2. Результаты о малости $\|z_m\|_2$ и о ее порядке вытекают обычно из известных оценок для норм в B_2 решений краевых задач через нормы правых частей $\|\varepsilon^{m+1} g_m\|_1$ в некотором, быть может другом, банаховом пространстве B_1. Эти оценки, в применении к нашему случаю, как правило, имеют вид $\|z_m\|_2 \leqslant K_0 \|\varepsilon^{m+1} g_m\|_1$. Допустим, что каждый член при ε^{m+s} имеет ограниченную норму в некотором банаховом пространстве B_1; значит, $\|g_m\|_1 = O(1)$, $\| \quad \|_1$ — норма в B_1. Далее, так как u_ε и все суммы $(w_i + v_i + \varepsilon\alpha_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ удовлетворяют граничным условиям (2.5), (2.7) задачи A_ε, то этим условиям удовлетворяет и z_m. Мы сделаем гипотезу о равномерной разрешимости задачи A_ε относительно ε, т. е. предположим, что задача A_ε: $L_\varepsilon y_\varepsilon = g$, при условиях (2.5), (2.7) разрешима для любого достаточно малого ε и любого $g \in B_1$, решение ее единственно (для задачи Коши это удовлетворяется автоматически) и для всех достаточно малых ε

$$\| y_\varepsilon \|_2 \leqslant K_0 \| g \|_1, \tag{2.27}$$

где K_0 — константа, не зависящая от ε_0[1]). Тогда из (2.26) следует: $z_m = \varepsilon^{m+1} \bar{z}_m$, $\| \bar{z}_m \|_2 = O(1)$. Мы приходим к разложению

$$u_\varepsilon = w_0 + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i (w_i + \alpha_{i-1}) + \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s v_s + \varepsilon^{m+1} \tilde{z}_m, \tag{2.28}$$

где $\tilde{z}_m = \bar{z}_m + \alpha_m$. Здесь w_0 — решение задачи A_0. w_i и α_i — функции, равномерно ограниченные на $[0, 1]$ вместе со своими производными до определенного порядка, v_s — функции типа погранслоя k-го порядка, $\| \tilde{z}_m \|_2 = O(1)$.

Перейдем теперь к более общему случаю, когда граничные условия для вырожденной задачи A_0 и невырожденной задачи A_ε задаются и в точке $x = 0$ и в точке $x = 1$ (т. е. наряду с условиями (2.5) и (2.7) фигурируют условия (2.5′) и (2.7′)). Пограничный слой возникает не только в окрестности точки $x = 0$, но и в окрестности точки $x = 1$. Мы заранее предположим, что выполняются три условия:

1) Задача A_0 разрешима при любом $h \in B_1$ (это значит: нуль не является собственным значением оператора L_k при условиях (2.5) и (2.5′)).

2) Вырождение задачи A_ε в задачу A_0 — регулярное, т. е. уравнение (2.8) имеет l_1 корней $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_{l_1}$, а уравнение (2.8′) — l_2 корней $-\nu_1, -\nu_2, \ldots, -\nu_{l_2}$ с отрицательными вещественными частями (что совпадает с числом условий (2.7) и (2.7′) в точках $x = 0$ и $x = 1$).

3) Задача A_ε равномерно разрешима (т. е. выполнено (2.27))[2]).

Мы оставляем сейчас в стороне вопрос, вытекает ли условие 3) из условий 1) и 2) (как это имело место для задач § 1)[3]).

Проведем итерационный процесс, описанный выше и приводящий к разложению (2.28), в нашем случае. Функции w_0 (решение вырожденной задачи), $w_1, \ldots, w_m$ определяются так же, как выше.

Функции v_i ($i = 0, 1, \ldots, N$) — типа погранслоя мы должны строить отдельно в окрестности точки $x = 0$ и в окрестности точки $x = 1$.

---

[1]) Как мы увидим в следующем параграфе, норму $\| \quad \|_2$ естественно брать зависящей от ε. В качестве пространств B_1 и B_2 в настоящей работе мы чаще всего будем брать пространства $W_2^{(s)}$ или пространства C. Подробнее об этом см. §§ 3, 4, 7. Употребление обычной гильбертовой метрики не всегда целесообразно, так как в этой метрике погранслой имеет норму, бесконечно малую с ε (см. § 5).

[2]) Достаточные условия равномерной разрешимости приводятся в следующем параграфе.

[3]) Недавно, студент МГУ А. Б. Шабат доказал, что при весьма общих предположениях условие 3) в самом деле является следствием условий 1) и 2).

Функция $v_{00} = \varepsilon^{k_1}\bar{v}_{00}$ типа погранслоя в окрестности точки $x = 0$ строится так же, как выше, путем решения уравнения (2.23) при $i = 0$, только l условий (2.24) заменяются l_1 условиями

$$\left.\frac{d^{k_1+r}\bar{v}_{00}}{dt^{k_1+r}}\right|_{t=0} = \varepsilon^{k_1+r} \left.\frac{d^{k_1+r}\bar{v}_{00}}{dx^{k_1+r}}\right|_{x=0} = -\varepsilon^{r} \left.\frac{d^{k_1+r}w_0}{dx^{k_1+r}}\right|_{x=0} \qquad (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ l_1 - 1).$$

Функция $v_{00} = \varepsilon^{k_1}\bar{v}_{00}$ имеет характер погранслоя k_1-го порядка вида, аналогичного (2.15'):

$$v_{00} = \varepsilon^{k_1}\bar{v}_{00} = \varepsilon^{k_1} \sum_{j=1}^{l_1} c_j \exp(-\lambda_j t) = \varepsilon^{k_1} \sum_{j=1}^{l_1} c_j \exp\left(-\lambda_j \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Функции $v_{i0} = \varepsilon^{k_1}\bar{v}_{i0}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ определяются последовательно из уравнений (2.23) с условиями типа (2.24):

$$\left.\frac{d^{k_1+r}\bar{v}_{i0}}{dt^{k_1+r}}\right|_{t=0} = -\varepsilon^{r} \left.\frac{d^{k_1+r}w_i}{dx^{k_1+r}}\right|_{x=0} \qquad (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ l_1 - 1); \tag{2.29}$$

v_{i0} является погранслоем k_1-го порядка: $v_{i0} = \varepsilon^{k_1}\bar{v}_{i0} = \varepsilon^{k_1} \sum\limits_{j=1}^{l_1} c_{ij} \exp(-\lambda_j t) =$ $= \varepsilon^{k_1} \sum\limits_{j=1}^{l_1} c_{ij} \exp\left(-\lambda_j \frac{x}{\varepsilon}\right)$, где c_{ij} — многочлены от $t = \frac{x}{\varepsilon}$. Аналогично строятся и функции $v_{01},\ v_{11},\ \ldots,\ v_{j1},\ \ldots$ типа погранслоя k_2-го порядка в окрестности точки $x = 1$.

Мы исходим из разложений (2.3') коэффициентов (вместо (2.3)). Вместо переменного $t = \frac{x}{\varepsilon}$ мы вводим в окрестности точки $x = 1$ переменное $t_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}$, где $x_1 = 1 - x$. Разложению (2.9) оператора L_ε в окрестности точки $x = 0$ отвечает следующее разложение в окрестности $x = 1$ $(x_1 = 0)$:

$$\varepsilon^k L_\varepsilon u = M_1 u + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j R_{j1} u + \varepsilon^{N+1} R_{N+1,\,1} u.$$

Здесь $M_1 u$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$M_1 u \equiv \sum_{r=0}^{l} (-1)^{k+r} a_{k+r,\,1} \frac{d^{k+r}u}{dt_1^{k+r}}.$$

Ему отвечает характеристический многочлен (см. (2.8'))

$$\sum_{r=0}^{l} (-1)^{k+r} a_{k+r,\,1} \mu^{k+r} = \mu^k Q_1(\mu).$$

Для уравнения с постоянными коэффициентами

$$M_1 \bar{v}_{01} = 0 \tag{2.30}$$

характеристическое уравнение $\mu^k Q_1(\mu) = 0$ имеет, по предположению, l_2 корней: $-\nu_1,\ \ldots,\ -\nu_{l_2}$, с отрицательными вещественными частями. Каждому из них отвечает решение уравнения (2.30) типа погранслоя: $\exp(-\nu_j t_1) = \exp\left(-\nu_j \frac{x_1}{\varepsilon}\right) = \exp\left(-\nu_j \frac{1-x}{\varepsilon}\right)$. Граничным условиям (2.16) отвечают граничные условия

$$\left.\frac{d^{k_2+r}\bar{v}_{01}}{dt_1^{k_2+r}}\right|_{t_1=0} = (-1)^{k_2+r}\varepsilon^{k_2+r}\left.\frac{d^{k_2+r}\bar{v}_{01}}{dx^{k_2+r}}\right|_{x=1} =$$

$$= (-1)^{k_2+r+1}\varepsilon^r \left.\frac{d^{k_2+r}w_0}{dx^{k_2+r}}\right|_{x=1} \qquad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ l_2-1). \tag{2.31}$$

Из этих l_2 условий мы находим l_2 коэффициентов d_{0j} в представлении

$$v_{01} = \varepsilon^{k_2}\bar{v}_{01} = \varepsilon^{k_2}\sum_{j=1}^{l_2}{}' d_{0j}\exp(-\nu_j t_1);$$

v_{01} есть погранслой k_2-го порядка в окрестности точки $x=1$. Затем последовательно находим $\bar{v}_{i1}$ $(i=1,\ \ldots,\ N_1)$ из уравнений вида (2.23): $M_1\bar{v}_{i1} = -\sum_{s=1}^{i}{}' R_{s,1}\bar{v}_{i-s,1}$, условий типа (2.29) и требования, чтобы $\bar{v}_{i1}$ было функцией типа погранслоя в окрестности точки $x=1$. $v_{i1} = \varepsilon^{k_2}\bar{v}_{i1}$ оказываются функциями типа погранслоя k_2-го порядка — линейными формами от $\exp(-\nu_j t_1)$ с коэффициентами — многочленами от t_1.

Далее, α_{i0} $(i=0,\ 1,\ \ldots)$, α_{i1} $(i=0,\ 1,\ \ldots)$ определяются так же, как выше α_i, с тем, чтобы функции $w_i + v_{i0} + \varepsilon\alpha_{i0}$ удовлетворяли $k_1 + l_1$ условиям (2.5) и (2.7) в точке $x=0$, а $w_i + v_{i1} + \varepsilon\alpha_{i1}$ — (k_2+l_2) условиям (2.5′) и (2.7′) в точке $x=1$. Введем теперь сглаживающие функции $\psi(x)$, где $\psi(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 при $x \leqslant \frac{1}{3}$ и равная 0 при $x \geqslant \frac{2}{3}$. Тогда

$$\alpha_j = \psi(4x)\alpha_{j0} + \psi(4(1-x))\alpha_{j1} \tag{2.32}$$

есть бесконечно дифференцируемая функция, совпадающая с α_{j0} при $x \in \left[0,\ \frac{1}{12}\right]$ и с α_{j1} при $x \in \left[\frac{11}{12},\ 1\right]$. Эти функции α_j при $j < i$ входят в уравнение (2.22) для определения w_i. Точно так же мы склеим из v_{j0} и v_{j1} функцию v_j: $v_j = \psi(4x)v_{j0} + \psi(4(1-x))v_{j1}$. Во второй фигурной скобке в правой части (2.19) запишем теперь на отрезке $\left[0,\ \frac{1}{12}\right]$ выражение

$$\varepsilon^{-k}\left(M_0 + \sum_{s=1}^{N+1}{}' \varepsilon^s R_s\right)\left(v_{00} + \sum_{r=1}^{N}{}' \varepsilon^r v_{r0}\right) =$$

$$= \varepsilon^{-(k-k_1)}\left(M_0 + \sum_{s=1}^{N+1}{}' \varepsilon^s R_s\right)\left(\bar{v}_{00} + \sum_{r=1}^{N}{}' \varepsilon^r \bar{v}_{r0}\right).$$

Для того чтобы уничтожились все члены при ε^s $(s=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$, нужно положить $N \geqslant m + k - k_1$. Аналогично, на отрезке $\left[\frac{11}{12},\ 1\right]$ вместо этой скобки фигурирует выражение

$$\varepsilon^{-(k-k_2)}\left(M_1+\sum_{s=1}^{N+1}\varepsilon^s R_{s1}\right)\left(\bar{v}_{01}+\sum_{r=1}^{N}\varepsilon^r\bar{v}_{r1}\right).$$

Для того чтобы уничтожились все члены при ε^s $(s=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$ нужно положить $N\geqslant m+(k-k_2)$. Мы можем принять

$$N=m+k-\min(k_1,\ k_2)_i.$$

Так как w_i мы определили лишь для $i\leqslant m$, то неоднородные граничные условия (2.29) для $i>m$ $(m<i\leqslant N)$ заменяются однородными:

$$\left.\frac{d^{k_1+r}\bar{v}_{i0}}{dt^{k_1+r}}\right|_{t=0}=0 \qquad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ l_1-1;\ i=m+1,\ \ldots,\ N).$$

Аналогично, при $i>m$ для определения v_{i1} неоднородные граничные условия в точке $x=1$ заменяются однородными.

Так же как в прошлый раз, показывается, что на каждом из участков $\left[0,\ \frac{1}{12}\right]$ и $\left[\frac{11}{12},\ 1\right]$, где v_i равны соответственно v_{i0} и v_{i1}, полагая

$$z_m=u_\varepsilon-\sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i w_i-\sum_{s=0}^{N}(\varepsilon^s v_s+\varepsilon^{s+1}\alpha_s), \qquad N=m+k-\min(k_1,\ k_2),$$

имеем:

$$L_\varepsilon z_m=O(\varepsilon^{m+1}). \tag{2.33}$$

При $x\geqslant\frac{1}{12}$ все выражения $\exp\left(-\lambda_i\frac{x}{\varepsilon}\right)$ и их производные стремятся к нулю равномерно при $\varepsilon\to 0$ быстрее, чем любая степень ε. Поэтому, так как ψ ограничена и имеет ограниченные производные, функции $\psi(4x)\exp\left(-\lambda_i\frac{x}{\varepsilon}\right)$ и их производные при $x\geqslant\frac{1}{12}$ также стремятся к нулю быстрее, чем любая степень ε. То же имеет место и для функций $\psi(4(1-x))\exp\left(-\frac{\nu_i(1-x)}{\varepsilon}\right)$ при $x\leqslant\frac{11}{12}$. Следовательно, при любом i на отрезке $\left[\frac{1}{12},\ \frac{11}{12}\right]$ $L_\varepsilon v_i=L_\varepsilon(\psi(4x)v_{i0})+\psi(4(1-x))v_{i1})$ стремится к нулю равномерно быстрее, чем ε^{m+1}, т. е. оценка (2.33) имеет место на всем отрезке $[0,\ 1]$. Отсюда следует:

$$L_\varepsilon z_m=\varepsilon^{m+1}g_m, \qquad \|g_m\|_1=O(1),$$

и в силу равномерной разрешимости операторов L_ε при граничных условиях (2.5), (2.5′), (2.7), (2.7′) $z_m=\varepsilon^{m+1}\bar{z}_m$, $\|\bar{z}_m\|_2=O(1)$.

При окончательной записи асимптотического разложения удобно объединить ограниченные вместе с производными функции w_i и α_{i-1}, именно обозначая: $\tilde{w}_i=w_i+\alpha_{i-1}$, $\tilde{w}_0=w_0$.

Перенеся в формуле (2.22) член $L_k\alpha_{i-1}$ в левую часть, запишем это уравнение в виде

$$L_k\tilde{w}_i=-\sum_{s=1}^{[i]}L_{k+s}\tilde{w}_{i-s} \qquad (i=\min(i,\ l)). \tag{2.34}$$

Так как w_i удовлетворяет однородным условиям (2.5), (2.5′), а α_{i-1} — соответственным неоднородным условиям, то $\widetilde{w}_i$ удовлетворяет тем же неоднородным условиям (до (k_1-1)-го, соответственно (k_2-1)-го, порядка производных на конце 0, соответственно 1), что и α_{i-1}. Таким образом, $\widetilde{w}_i$ $(i>0)$ можно также определить как решения рекуррентных уравнений (2.34) при соответствующих неоднородных граничных условиях.

Обозначая $y_m = \bar{z}_m + \sum\limits_{r=m}^{N} \varepsilon^{r-m}\alpha_r$, приходим к следующей теореме:

Теорема 3. *При условиях разрешимости задачи A_0, равномерной разрешимости задач A_ε и регулярного вырождения задач A_ε в задачу A_0, решение u_ε задачи A_ε при достаточно малых $\varepsilon>0$ допускает следующее представление:*

$$u_\varepsilon = w_0 + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i \widetilde{w}_i + \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r v_r + \varepsilon^{m+1} y_m, \qquad N = m + k - \min(k_1, k_2). \qquad (2.35)$$

Здесь w_0 — решение задачи A_0, $\widetilde{w}_i = w_i + \alpha_{i-1}$ — функции, ограниченные (относительно ε) вместе со своими производными на [0, 1], *v_r — функции типа погранслоя k_1-го порядка в окрестности $x=0$ и k_2-го порядка в окрестности $x=1$, $\| y_m \|_2$ ограничена не зависящей от ε константой.*

Заметим, что достаточным условием разрешимости задачи A_0 является позитивность оператора L_k при граничных условиях (2.5), (2.5′):

$$(L_k u,\ u) \geqslant C(u,\ u), \qquad C>0, \qquad (2.36)$$

где u — любая k раз дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (2.5), (2.5′).

Достаточным условием равномерной разрешимости задачи A_ε является, например, равномерная позитивность относительно ε операторов L_ε при граничных условиях (2.5), (2.5′), (2.7), (2.7′), т. е. для всех $(k+l)$ раз непрерывно дифференцируемых функций u, удовлетворяющих этим граничным условиям, и всех достаточно малых $\varepsilon>0$

$$(L_\varepsilon u,\ u) \geqslant C_1 \| u \|^2, \qquad C_1>0, \qquad (2.36')$$

где норма $\|\ \|$ берется в соответствующем пространстве B, например $B = W_2^{(p)}$.

Пример. Пусть в задаче A_0 одно из чисел k_i, например k_2, равно нулю (задача A_0 есть задача Коши для уравнения порядка $k=k_1$). Задача A_ε есть граничная задача для уравнения (2.6) $(k+l)$-го порядка с $k+l_1$ граничными условиями в точке $x=0$ и l_2 условиями в точке $x=1$. Так как в точке $x=1$ нет граничных условий задачи A_0, то выпадают в разложении (2.32) функции α_{j1}, введенные для компенсации граничных условий задачи A_ε в точке $x=1$.

В частности, если задача A_0 есть задача Коши для уравнения 1-го порядка

$$L_1 y \equiv y' + a(x) y = h \qquad (a>0) \qquad (2.37)$$

при условии $y(0)=0$, а задача A_ε заключается в решении аналога 1-й краевой задачи для уравнения 2-го порядка

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv -\varepsilon y_\varepsilon'' + y_\varepsilon' + a(x) y_\varepsilon = h, \qquad (2.38)$$

т. е. y_ε ищется при условиях

$$y_\varepsilon(0)=0, \qquad y_\varepsilon(1)=0,$$

то решение y_ε задачи A_ε допускает асимптотическое представление:

$$y_\varepsilon = y_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^i y_i(x)+\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r v_r(x)+\varepsilon^{m+1}\bar{z}_m(x),$$

где $y_0(x)$—решение задачи A_0 и $y_i(x)$ получаются последовательно из решений задачи Коши (см. формулы (2.22), (2.5) при $k=1$), $v_r(x)$ — функции типа погранслоя нулевого порядка, $\|\bar{z}_m\|_2=O(1)$.

§ 3. Аналоги первой краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений четного и нечетного порядков. Критерии регулярности вырождения

В настоящем параграфе мы изучим в случае обыкновенных дифференциальных уравнений аналоги тех краевых задач, которые далее рассматриваются для уравнений в частных производных. Точнее, мы приведем достаточные условия, при которых обыкновенный дифференциальный оператор L_ε с параметрами при старших производных имеет равномерно позитивную симметрическую часть и равномерно обратим (относительно ε, см. ниже). Эти условия обеспечивают разрешимость задачи A_ε. Далее докажем, что *при этих же условиях равномерной позитивности, если естественным образом определить задачу A_0 для вырожденного оператора L_0, имеет место регулярность вырождения задачи A_ε в задачу A_0, т. е. справедливы асимптотические формулы для u_ε, а разность между u_ε и $w_0+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^i\widetilde{w}_i$ имеет характер пограничного слоя.*

1. Пусть на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ задан обыкновенный дифференциальный оператор

$$L_\varepsilon u\equiv\sum_{j=1}^{l}\varepsilon^j a_{k+j}(x)\frac{d^{k+j}u}{dx^{k+j}}+\sum_{s=1}^{k}a_s(x)\frac{d^s u}{dx^s}+a_0(x)u\equiv L_\varepsilon^{(1)}u+L_0u,$$
$$(a_{k+l}(x)\neq 0 \quad \text{для} \quad 0\leqslant x\leqslant 1), \tag{3.1}$$

где через $L_\varepsilon^{(1)}$ мы обозначили сумму членов в (3.1), содержащих в коэффициентах ε. Под характеристической формой $\pi_\varepsilon(\xi;x)$ оператора L_ε в точке x будем подразумевать

$$\pi_\varepsilon(\xi;x)=\sum_{j=0}^{l}\varepsilon^j a_{k+j}(x)(i\xi)^{k+j}. \tag{3.2}$$

Аналогично определяется характеристическая форма $\pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x)$ оператора $L_\varepsilon^{(1)}$: $\pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x)=\sum_{j=1}^{l}\varepsilon^j a_{k+j}(x)(i\xi)^{k+j}$. Определим граничные условия: если $k+l=2(k_1+l_1)$ — число четное, то граничные условия имеют вид

$$\left.\frac{d^s u(x)}{dx^s}\right|_{x=0}=\left.\frac{d^s u(x)}{dx^s}\right|_{x=1}=0 \quad (s=0,1,\ldots,k_1+l_1-1). \tag{3.3}$$

Эти условия, одинаковые в обоих концах, являются аналогом в одномерном случае первой краевой задачи для эллиптических уравнений.

В случае, если $k+l=2(k_1+l_1)+1$ — число нечетное, мы задаем k_1+l_1+1 условие на одном конце и k_1+l_1 условий на другом конце. Именно условимся: если $(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}(x)>0$, то задаем условия в виде

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{d^s u(x)}{dx^s}\right|_{x=0} &= 0 \ (s=0,\ 1,\ \ldots,\ k_1+l_1), \\ \left.\frac{d^r u(x)}{dx^r}\right|_{x=1} &= 0 \ (r=0,\ 1,\ \ldots,\ k_1+l_1-1), \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

если $(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}(x)<0$, то задаем условия в виде

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{d^s u(x)}{dx^s}\right|_{x=0} &= 0 \ (s=0,\ 1,\ \ldots,\ k_1+l_1-1), \\ \left.\frac{d^r u(x)}{dx^r}\right|_{x=1} &= 0 \ (r=0,\ 1,\ \ldots,\ k_1+l_1). \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Эти условия вместе с приведенными ниже обеспечивают позитивность операторов L_ε для достаточно малых ε.

Такая краевая задача является аналогом того, что мы будем называть в дальнейшем первой краевой задачей для «однохарактеристических» уравнений в частных производных нечетного порядка.

Начнем со случая, когда $k=2k_1$ и $l=2l_1$ — числа четные. Ниже мы приведем условия, при которых операторы L_ε при граничных условиях (3.3) озитивны (точнее, имеют позитивную симметрическую часть), и притом равномерно позитивны, именно

$$(L_\varepsilon u,\ u)\geqslant\alpha^2\left[\varepsilon^{2l_1}\left\|\frac{d^{k_1+l_1}u}{dx^{k_1+l_1}}\right\|^2+\left\|\frac{d^{k_1}u}{dx^{k_1}}\right\|^2+\|u\|^2\right]=\alpha^2\|u\|_\varepsilon^2, \tag{3.6}$$

где α^2 не зависит от ε и от u; через $\|\ \|_\varepsilon$ мы обозначили сумму норм, стоящих в скобках справа. Из равномерной позитивности (3.6) вытекает разрешимость уравнений

$$L_\varepsilon u=h$$

при граничных условиях (3.3) и любом h из $\mathscr{L}_2$. Действительно, число граничных условий совпадает с порядком уравнения, а позитивность тогда обеспечивает единственность и, следовательно, существование решения задачи A_ε. При этом из (3.6) следует, что для решения u этой задачи

$$\|u\|_\varepsilon^2\leqslant C\|h\|^2, \tag{3.7}$$

где C не зависит от ε. Таким образом, из равномерной позитивности следует равномерная разрешимость задач A_ε (т. е. выполнение (3.7)).

Теорема 4. *Если числа $k=2k_1$, $k+l=2(k_1+l_1)$ — четные, характеристическая форма оператора $L_\varepsilon^{(1)}$ имеет положительную вещественную часть, точнее:*

$$\operatorname{Re}\pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;\ x)\equiv\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}(-1)^{j+k_1}a_{2(k_1+j)}(x)\,\xi^{2(j+k_1)}\geqslant\alpha^2\Big(\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\xi^{2(j+k_1)}\Big), \tag{3.8}$$

и, кроме того, оператор L_0 *позитивен*[1]):

$$(L_0 u,\ u) \geqslant \gamma^2 (\| D^{k_1} u \|^2 + \| u \|^2) \tag{3.9}$$

$\left(D^i = \frac{d^i}{dx^i} \right)$ *для любых гладких функций u, удовлетворяющих условиям* (3.3), *то операторы* L_ε (*при граничных условиях* (3.3)) *равномерно позитивны при достаточно малых* ε. l_1-*лишние*

Более того, *имеет место «энергетическая» оценка*:

$$\sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} u \|^2 + \| D^{k_1} u \|^2 + \| u \|^2 \leqslant \overline{\beta}^2 (L_\varepsilon u,\ u) \leqslant \overline{\beta}_1^2 \| h \|^2,\quad h = L_\varepsilon u. \tag{3.10}$$

Примечание. Если коэффициенты a_j — постоянные, то достаточным условием равномерной позитивности операторов L_ε является (во всех случаях) положительность формы: $\operatorname{Re} P_\varepsilon (i\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$, и $a_0 > 0$, где $P_\varepsilon(\lambda)$ — характеристический многочлен всего оператора L_ε.

Обозначим через $\Lambda_\varepsilon u$ часть оператора $L_\varepsilon u$, равную сумме членов L_ε, с четными порядками производных, в коэффициенты которых входит ε:

$$\Lambda_\varepsilon u \equiv \varepsilon^{2l_1} a_{2(k_1+l_1)}(x) \frac{d^{2(k_1+l_1)} u}{dx^{2(k_1+l_1)}} + \ldots + \varepsilon^2 a_{2k_1+2}(x) \frac{d^{2k_1+2} u}{dx^{2k_1+2}}.$$

Лемма 2. *Если* $k = 2k_1$ *и характеристическая форма* $\widetilde{\pi}_\varepsilon(\xi;\ x) = \operatorname{Re} \pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;\ x)$ *оператора* Λ_ε:

$$\widetilde{\pi}_\varepsilon(\xi;\ x) = \operatorname{Re} \pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;\ x) = \sum_{j=1}^{l_1} (-1)^{k_1+j} \varepsilon^{2j} a_{2(k_1+j)}(x)\, \xi^{2(k_1+j)} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha^2 \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \xi^{2(k_1+j)}, \tag{3.11}$$

где α^2 *не зависит ни от* x, *ни от* ξ, *то для достаточно малых* ε:

$$(\Lambda_\varepsilon u,\ u) \geqslant \beta^2 \Big[\sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} u \|^2 \Big] - M\varepsilon [\| D^{k_1} u \|^2 + \| u \|^2], \tag{3.12}$$

где M — *некоторая константа, а* $u \in \Omega^0(0,\ 1)$, *т. е.* u — *любая гладкая функция, обращающаяся в нуль вблизи точек* 0 *и* 1 (*и вне* [0, 1]). — финитная

Доказательство[2]). 1°. Допустим сначала, что коэффициенты $a_i(x) = a_i$ — постоянные. Тогда, обозначая преобразование Фурье $u(x)$ через $\widetilde{u}(\xi)$:

$$\widetilde{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u(x)\, dx,\quad (i\xi)^r \widetilde{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} D^r u\, dx,$$

и пользуясь равенством Парсеваля и (3.11), получим:

$$(\Lambda_\varepsilon u,\ u) = (\widetilde{\pi}_\varepsilon(\xi) \widetilde{u}(\xi),\ \widetilde{u}(\xi)) \geqslant \alpha^2 \sum_{j=1}^{l_1} (\varepsilon^{2j} \xi^{2(k_1+j)} \widetilde{u},\ \widetilde{u}) =$$

$$= \alpha^2 \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} u \|^2, \tag{3.12'}$$

---

[1]) Легко привести достаточные условия на коэффициенты L_0, при которых (3.9) имеет место.

[2]) Доказательство этой леммы следует доказательству Гординга [29] и Брауде ра [23], [24] полуограниченности эллиптических операторов (не содержащих параметры).

и оценка (3.12) установлена. Заметим, что оценка (3.12′) справедлива для любых финитных функций u.

2°. Пусть теперь $a_i(x)$ — переменные коэффициенты, и w обращается в нуль вне интервала $(\gamma, \gamma+\delta) \subset [0, 1]$. Тогда, обозначая через Λ_ε^0 оператор, полученный из Λ_ε заменой его коэффициентов их значениями в точке x_0, $\gamma < x_0 < \gamma + \delta$, получим согласно (3.12′) для $w \in \Omega^0(\gamma, \gamma+\delta)$:

$$(\Lambda_\varepsilon w, w) = (\Lambda_\varepsilon^0 w, w) + ((\Lambda_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon^0) w, w) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha^2 \Big[\sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} u \|^2\Big] + ((\Lambda_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon^0) w, w). \tag{3.13}$$

Интегрируя по частям до порядка, равного половине порядка каждого слагаемого, входящего в Λ_ε, получим:

$$((\Lambda_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon^0) w, w) = \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} (-1)^{k_1+j} (D^{k_1+j} w, D^{k_1+j} (\eta_{k_1+j} w)), \tag{3.14}$$

где

$$\eta_i(x) = a_{2i}(x) - a_{2i}(x_0).$$

Заметим, что

$$D^s(\eta_s w) = \eta_s D^s w + \sum_{i=1}^{s} \binom{s}{i} \eta_s^{(i)} D^{s-i} w.$$

Оценивая скалярное произведение в каждом члене из (3.14), получаем:

$$|(D^s w, D^s(\eta_s w))| \leqslant |(\eta_s D^s w, D^s w)| + \sum_{i=1}^{s} \binom{s}{i} |(D^s w, \eta_s^{(i)} D^{s-i} w)| \leqslant$$

$$\leqslant \omega_\delta [\| D^s w \|^2] + C_0 \Big[\sum_{i=1}^{s} |(D^s w, \eta_s^{(i)} D^{s-i} w)|\Big], \tag{3.15}$$

где

$$\omega_\delta = \max_{x \in [\gamma, \gamma+\delta]} |\eta_s| \quad (s = k_1 + 1, \ldots, k_1 + l_1).$$

Используя известное неравенство для скалярных произведений $|(u, v)| \leqslant \leqslant \frac{1}{2}\left(\omega^2 \| u \|^2 + \frac{1}{\omega^2} \| v \|^2\right)$ при любом $\omega > 0$ и обозначая через C максимум на $[0, 1]$ выражений $|a_{2j}^{(i)}(x)|$ $(j = k_1 + 1, \ldots, k_1 + l_1;\ 1 \leqslant i \leqslant j)$, получим:

$$|(D^s w, \eta_s^{(i)} D^{s-i} w)| \leqslant \frac{1}{2}\Big[\omega^2 \| D^s w \|^2 + \frac{1}{\omega^2} \| \eta_s^{(i)} D^{s-i} w \|^2\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\Big[\omega^2 \| D^s w \|^2 + \frac{C^2}{\omega^2} \| D^{s-i} w \|^2\Big] \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Полагая $\omega^2 = \varepsilon$, будем иметь (при $i \geqslant 1$):

$$\varepsilon^{2(s-k_1)} |(D^s w, \eta_s^{(i)} D^{s-i} w)| \leqslant \varepsilon \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{2(s-k_1)} \| D^s w \|^2\right) + \frac{C^2}{2} \varepsilon^{2(s-k_1)-1} \| D^{s-i} w \|^2.$$

При

$$s - i > k_1, \quad i \geqslant 1, \quad \varepsilon^{2(s-k_1)-1} \leqslant \varepsilon\, \varepsilon^{2(s-i-k_1)},$$

при

$$s - i \leqslant k_1, \quad \varepsilon^{2(s-k_1)-1} \leqslant \varepsilon \ (\text{так как } s > k_1,\ \varepsilon < 1).$$

Отсюда и из (3.15) получаем при $s > k_1$:

$$\varepsilon^{2(s-k_1)} \left| (D^s w,\ D^s(\eta_s w)) \right| \leqslant (\omega_\delta + C_1\varepsilon)\, \varepsilon^{2(s-k_1)} \| D^s w \|^2 + \\ + C_1\varepsilon \Big(\sum_{r=k_1+1}^{s-1} \varepsilon^{2(r-k_1)} \| D^r w \|^2 + \sum_{\sigma=0}^{k_1} \| D^\sigma w \|^2 \Big). \tag{3.16}$$

Подставляя найденные оценки в (3.14) и делая приведение подобных членов, получим:

$$\left| ((\Lambda_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon^0)\, w,\ w) \right| \leqslant (\omega_\delta + C_2\varepsilon) \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} w \|^2 + C_3\varepsilon \sum_{\sigma=0}^{k_1} \| D^\sigma w \|^2. \tag{3.17}$$

Выберем ε и δ такими, чтобы $\omega_\delta + C_2\varepsilon < \frac{\alpha^2}{2}$. Тогда из (3.17) и (3.13) получим:

$$(\Lambda_\varepsilon w,\ w) \geqslant \frac{\alpha^2}{2} \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} w \|^2 - \varepsilon C_3 \sum_{\sigma=0}^{k_1} \| D^\sigma w \|, \tag{3.18}$$

и, поскольку

$$\| D^i w \|^2 \leqslant M_i \| D^{k_1} w \|^2 \quad (i \leqslant k_1), \tag{3.18'}$$

оценка (3.12) и в этом случае установлена.

3^0. Пусть $u \in \Omega^0\ (0,\ 1)$. Представим функцию, равную 1 на $[0,\ 1]$, в виде

$$1 \equiv \sum_{i=1}^{N} \zeta_i^2 (x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3.18''}$$

где $\zeta_i(x)$ — гладкие функции, отличные от нуля на

$$(\gamma_i,\ \gamma_i + \delta_i), \quad \delta_i \leqslant \delta.$$

Имеем:

$$(\Lambda_\varepsilon u,\ u) = \Big(\sum_{i=1}^{N} \zeta_i^2(x)\, \Lambda_\varepsilon u,\ u \Big) = \sum_{i=1}^{N} \left[(\Lambda_\varepsilon \zeta_i u,\ \zeta_i u) + B(u,\ \zeta_i) \right],$$

причем в $B(u,\ \zeta_i)$ u входит с производными, по крайней мере на единицу низшего порядка, чем в соответствующих членах $\sum (\Lambda_\varepsilon \zeta_i u,\ \zeta_i u)$. С помощью интегрирования по частям и таких же оценок скалярных произведений, какие мы применяли в 2^0, найдем, что

$$| B(u,\ \zeta_i) | \leqslant C\varepsilon \Big[\sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} u \|^2 \Big] + C\varepsilon \Big[\sum_{s=0}^{k_1} \| D^s u \|^2 \Big]. \tag{3.19}$$

Взяв ε столь малым, что $C\varepsilon \leqslant \frac{\alpha^2}{4}$, и применяя к каждому члену $(\Lambda_\varepsilon \zeta_i u,\ \zeta_i u)$ оценку (3.18), получим:

$$(\Lambda_\varepsilon u,\ u) \geqslant \frac{\alpha^2}{2} \sum_{j=1}^{l_1} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} (\zeta_i u) \|^2 - \\ - C_3\varepsilon \sum_{\sigma=0}^{k_1} \sum_{i=1}^{N} \| D^\sigma (\zeta_i u) \|^2 - C\varepsilon \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} u \|^2 - C\varepsilon \sum_{s=1}^{k_1} \| D^s u \|^2. \tag{3.20}$$

Так как

$$\|D^{k_1+j}\zeta_i u\|^2 \geqslant \|\zeta_i D^{k_1+j}u\|^2 - C_1 \sum_{r=1}^{k_1+j} \|D^{k_1+j-r}u\|^2,$$

то из (3.20) выведем:

$$(\Lambda_\varepsilon u, u) \geqslant \frac{\alpha^2}{2} \sum_{j=1}^{l_1} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{2j} \|\zeta_i D^{k_1+j}u\|^2 -$$

$$- C_2\varepsilon \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \|D^{k_1+j}u\|^2 - C_4\varepsilon \sum_{s=1}^{k_1} \|D^s u\|^2. \qquad (3.20')$$

Взяв ε столь малым, чтобы $C_2\varepsilon \leqslant \frac{\alpha^2}{4}$ и учитывая (3.18″) и оценки вида (3.18′), получим (3.12), что и требовалось доказать.

Замечание. Лемма 2 доказана нами для $u \in \Omega^0$ (0, 1). Однако она справедлива также для функций u из $W_2^{2(k_1+l_1)}$, удовлетворяющих граничным условиям (3.3). Чтобы в этом убедиться, достаточно оценке (3.12) придать следующую форму:

$$\sum_{j=1}^{l_1} (-1)^{k_1+j} \varepsilon^{2j} (D^{k_1+j}u, D^{k_1+j}(a_{2(k_1+j)}u) +$$

$$+ M\varepsilon (\|D^{k_1}u\|^2 + \|u\|^2) \geqslant \beta^2 \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \|D^{k_1+j}u\|^2, \qquad (3.21)$$

причем сумма, стоящая в левой части (3.21), получена в результате интегрирования по частям из формы $(\Lambda_\varepsilon u, u)$.

Пусть $u \in W_2^{2(k_1+l_1)}$ (достаточно даже, чтобы $u \in W_2^{(k_1+l_1)}$) и u удовлетворяет граничным условиям (3.3). Тогда, как известно, можно построить последовательность функций $\{u_n(x)\}$ $\Big(= \{J_\eta(\zeta_n u)\}$, где ζ_n — гладкая функция, обращающаяся в нуль в $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[1-\frac{1}{n}, 1\right]$, J_η — оператор осреднения с радиусом $\eta = \frac{1}{2n}\Big)$, $u_n \in \Omega^0$ (0, 1) и $u_n \xrightarrow{W_2^{(k_1+l_1)}} u$. Подставляя в (3.21) $u = u_n$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, мы убедимся в справедливости (3.21) для указанных выше u.

Обозначим через $M_\varepsilon u$ часть оператора $L_\varepsilon u$, образованную членами нечетного порядка, содержащими в коэффициентах ε:

$$M_\varepsilon u \equiv \sum_{j=0}^{l_1-1} \varepsilon^{2j+1} a_{2(k_1+j)+1}(x) \frac{d^{2(k_1+j)+1}u}{dx^{2(k_1+j)+1}}. \qquad (3.22)$$

Имеет место

Лемма 3. *Пусть* $u(x) \in W_2^{2(k_1+l_1)}$ *и удовлетворяет граничным условиям* (3.3). *Тогда*

$$(M_\varepsilon u, u) \geqslant -C\varepsilon \Big(\sum_{j=1}^{l_1-1} \varepsilon^{2j} \|D^{k_1+j}u\|^2 + \|D^{k_1}u\|^2 + \|u\|^2 \Big). \qquad (3.23)$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что при граничных условиях (3.3)

$$\varepsilon^{2l_1-1}(a_{2(k_1+l_1)-1}D_t^{2(k_1+l_1)-1}u,\ u)=$$
$$=\frac{1}{2}\varepsilon^{2l_1-1}(-1)^{k_1+l_1-1}\int_0^1\frac{d}{dx}[a_{2(k_1+l_1)-1}][D^{k_1+l_1-1}u]^2\,dx+$$
$$+\varepsilon^{2l_1-1}\sum_{j\leqslant k_1+l_1-1}(b_jD^{k_1+l_1-1}u,\ D^ju). \qquad (3.24)$$

Первое слагаемое в правой части (3.24) равно нулю в силу граничных условий (3.3). Остальные слагаемые оцениваются так же, как мы это делали выше

$$\Big|\varepsilon^{2l_1-1}\sum_{j\leqslant k_1+l_1-1}(b_jD^{k_1+l_1-1}u,\ D^ju)\Big|\leqslant C_1\varepsilon\Big[\sum_{j=1}^{l_1-1}\varepsilon^{j2}\|D^{k_1+j}u\|^2+\|D^{k_1}u\|^2+\|u\|^2\Big].$$

Аналогичную оценку допускают и другие члены, входящие в $M_\varepsilon u$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Для функций u из $W_2^{2(k_1+l_1)}$, удовлетворяющих граничным условиям (3.3), согласно (3.12), (3.23), (3.9) имеем:

$$(L_\varepsilon u,\ u)=(\Lambda_\varepsilon u,\ u)+(M_\varepsilon u,\ u)+(L_0u,\ u)\geqslant$$
$$\geqslant(\beta^2-C\varepsilon)\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2+(\gamma^2-M\varepsilon-C\varepsilon)(\|u\|^2+\|D^{k_1}u\|^2)$$

Отсюда, взяв ε столь малым, что $\beta^2-C\varepsilon\geqslant\beta_1^2>0$ и $\gamma^2-M\varepsilon-C\varepsilon\geqslant\beta_1^2>0$, получим первую часть оценки (3.10). Далее, подставляя $L_\varepsilon u=h$ и пользуясь неравенством $(L_\varepsilon u,\ u)=(h,\ u)\leqslant\frac{1}{2}\left(\omega^2\|u\|^2+\frac{1}{\omega^2}\|h\|^2\right)$, получим (3.10). Теорема доказана.

Аналогичные теоремы о равномерной позитивности L_ε имеют место и в других случаях.

Теорема 4′. *Если $k+l=2(k_1+l_1)$ — четное число, $k=2k_1+1$ — нечетное, характеристическая форма $\pi_\varepsilon^{(1)}$ оператора $L_\varepsilon^{(1)}$ имеет положительную вещественную часть*

$$\operatorname{Re}\pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;\ x)=\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j-1}(-1)^{k_1+j}a_{2(k_1+j)}(x)\,\xi^{2(j+k_1)}\geqslant\alpha^2\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j-1}\xi^{2(j+k_1)}, \qquad (3.8')$$

а оператор L_0 позитивен в смысле выполнения (3.9), то операторы L_ε при граничных условиях (3.3) равномерно позитивны для достаточно малых ε.

Теорема 4″ и 4‴. *Если порядок L_ε — нечетный: $k+l=2(k_1+l_1)+1$, выполнено условие (3.8) или (3.8′) в зависимости от четности k: $k=2k_1$ или $k=2k_1+1$, и оператор L_0 позитивен в смысле (3.9), то операторы L_ε при граничных условиях (3.4), соответственно (3.5), для достаточно малых ε равномерно позитивны.*

В условиях теорем 4′, 4″, 4‴ *имеет место энергетическая оценка* (3.10) *или*

$$\sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1} \| D^{k_1+j}u \|^2 + \| D^{k_1}u \|^2 + \| u \|^2 \leqslant \bar{\beta}^2 (L_\varepsilon u, u) \leqslant \bar{\beta}_1^2 \| h \|^2 \qquad (3.10')$$

в зависимости от четности k: $k = 2k_1$ *или* $k = 2k_1 + 1$.

Доказательства этих теорем проводятся буквально так же, как доказательство теоремы 4. Сначала устанавливаем соответствующие оценки для четной части Λ_ε оператора L_ε, а для нечетной части M_ε доказываем лемму, аналогичную лемме 3. Например, для случая $k + l = 2(k_1 + l_1) + 1$, а $k = 2k_1$ (теорема 4″) имеет место следующая

Лемма 3′. *Пусть функция* $u \in W_2^{(2(k_1+l_1)+1)}$ *и удовлетворяет граничным условиям* (3.4) *или* (3.5), *в зависимости от знака* $a_{2(k_1+l_1)+1}$. *Тогда, в случае условий* (3.4), *квадратичная форма*

$$(M_\varepsilon u, u) \geqslant \frac{1}{2}(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1}(1)\, \varepsilon^{2l_1+1} \left| \frac{d^{k_1+l_1} u(1)}{dx^{k_1+l_1}} \right|^2 -$$

$$- C\varepsilon \left(\sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} u \|^2 + \| u \|^2 + \| D^{k_1} u \|^2 \right) \qquad (3.23')$$

и, в случае условий (3.5),

$$(M_\varepsilon u, u) \geqslant \frac{1}{2}(-1)^{k_1+l_1+1} a_{2(k_1+l_1)+1}(0)\, \varepsilon^{2l_1+1} \left| \frac{d^{k_1+l_1} u(0)}{dx^{k_1+l_1}} \right|^2 -$$

$$- C\varepsilon \left(\sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \| D^{k_1+j} u \|^2 + \| u \|^2 + \| D^{k_1} u \|^2 \right). \qquad (3.24')$$

Отметим, что первые слагаемые правых частей (3.23′) *и* (3.24′) *положительны, в силу условия на знак* $a_{2(k_1+l_1)+1}$ (см. (3.4) и (3.5)).

Доказательство. Для доказательства этих оценок достаточно лишь заметить, что

$$\varepsilon^{2l_1+1} (a_{2(k_1+l_1)+1} D^{2(k_1+l_1)+1} u, u) =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{2l_1+1} (-1)^{k_1+l_1} \int_0^1 \frac{d}{dx} (a_{2(k_1+l_1)+1} (D^{k_1+l_1} u)^2)\, dx +$$

$$+ \varepsilon^{2l_1+1} \sum_{j \leqslant k_1+l_1} (b_j D^{k_1+l_1} u, D^j u), \qquad (3.25)$$

где $b_j(x)$ — ограниченные функции (равные с точностью до множителя производным от $a_{2(k_1+l_1)+1}(x)$ порядка $\leqslant k_1 + l_1$). Далее, учитывая граничные условия (3.4) или (3.5), производя такое же интегрирование по частям для других слагаемых, входящих в $(M_\varepsilon u, u)$, и используя приемы, примененные выше для оценок скалярных произведений, получим (3.23′), соответственно (3.24′).

2. Мы доказали, что положительность формы (3.8) или (3.8′) и позитивность вырожденного оператора L_0 обеспечивают и равномерную позитивность операторов L_ε, а значит, и равномерную разрешимость задачи A_ε.

Вырожденная задача A_0 состоит в решении уравнения

$$L_0 w = h \tag{3.26}$$

при граничных условиях, зависящих от порядка оператора L_0.

1) В случае четности порядка $k = 2k_1$ этого оператора граничные условия являются условиями первой краевой задачи, а именно:

$$\left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=1} = 0 \quad (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ k_1 - 1). \tag{3.27}$$

Заметим, что из условия (3.9) положительности оператора L_0 следует:

$$(-1)^{k_1} a_{2k_1}(x) = (-1)^{k_1} a_k(x) > 0. \tag{3.28}$$

2) В случае нечетности порядка $k = 2k_1 + 1$ оператора L_0 граничные условия будем задавать в зависимости от знака старшего коэффициента $a_k(x) = a_{2k_1+1}$, который мы считаем отличным от нуля. Именно:

a) если $(-1)^{k_1} a_{2k_1+1}(x) > 0$, то берем следующие условия:

$$\left.\frac{d^r w}{dx^r}\right|_{x=0} = 0 \quad (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ k_1), \quad \left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=1} = 0 \ (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ k_1 - 1), \tag{3.29}$$

b) если $(-1)^{k_1} a_{2k_1+1}(x) < 0$, то условия следующие:

$$\left.\frac{d^r w}{dx^r}\right|_{x=0} = 0 \ (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ k_1 - 1), \quad \left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=1} = 0 \ (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ k_1). \tag{3.30}$$

Выбор этих условий вытекает из желания добиться позитивности оператора L_0.

Мы приступаем к исследованию асимптотики u_ε — решения задачи A_ε. Мы видели в предыдущем параграфе, что в случае регулярности вырождения задачи A_ε в задачу A_0, имеет место представление (2.35) решения u_ε, содержащее погранслой. Мы сейчас покажем, что приведенные в теоремах 4 и 4′ условия равномерной позитивности операторов L_ε при приведенных выше граничных условиях для L_0 обеспечивают регулярность вырождения задачи A_ε в задачу A_0.

Рассмотрим разные случаи четности и нечетности операторов L_ε и L_0.

1) L_ε *и* L_0 — *операторы четного порядка*: $k + l = 2(k_1 + l_1)$, $k = 2k_1$.

При переходе от задачи A_ε к задаче A_0, от условий (3.3) к (3.27) на каждом конце $x = 0$ и $x = 1$ теряется ровно l_1 условий. Требование регулярности означает, что дополнительное характеристическое уравнение для каждого из концов имеет ровно l_1 корней с отрицательной вещественной частью. Этими уравнениями являются алгебраические уравнения:

$$Q_0(\lambda) = \sum_{j=0}^{2l_1} a_{2k_1+j,\,0} \lambda^j = 0, \quad a_{s,\,0} = a_s(x)\,|_{x=0}, \tag{3.31}$$

$$Q_1(\lambda) = \sum_{j=0}^{2l_1} (-1)^{2k+j} a_{2k_1+j,\,1} \lambda^j = 0, \quad a_{r,\,1} = a_r(x)\,|_{x=1}. \tag{3.32}$$

Так как, по предположению, для любого $x \in [0,\ 1]$

$$\tilde{\pi}_\varepsilon(\xi;\ x) = \operatorname{Re} \pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;\ x) = \sum_{j=1}^{l_1} (-1)^{j+k_1} \varepsilon^{2j} a_{2(k_1+j)}(x)\, \xi^{2(k_1+j)} \geqslant$$

$$\geqslant C_1^2 \left(\varepsilon^{2l_1} \xi^{2(k_1+l_1)} + \varepsilon^2 \xi^{2(k_1+1)}\right) \tag{3.33}$$

и, кроме того, в силу (3.28), $(-1)^{k_1} a_{2k_1}(x) > 0$, то

$$\operatorname{Re} \pi_\varepsilon(\xi; x) = (-1)^{k_1} a_{2k_1}(x)\, \xi^{2k_1} + \tilde{\pi}_\varepsilon(\xi; x) \geqslant C^2 (\xi^{2k_1} + \varepsilon^{2l_1} \xi^{2(k_1+l_1)}). \tag{3.34}$$

Умножая на ε^{2k_1} и полагая $\varepsilon\xi = \eta$, получаем:

$$\sum_{r=0}^{l_1}{}' (-1)^{k_1+r} a_{2(k_1+r)}(x)\, \eta^{2(k_1+r)} \geqslant C^2 (\eta^{2k_1} + \eta^{2(k_1+l_1)}).$$

В частности, при $x = 0$ имеем:

$$\sum_{r=0}^{l_1}{}' (-1)^{k_1+r} a_{2(k_1+r),\,0}\, \eta^{2(k_1+r)} \geqslant C^2 (\eta^{2k_1} + \eta^{2(k_1+l_1)}). \tag{3.35}$$

Ниже доказывается алгебраическая лемма 4 (стр. 50), утверждающая, что условие (3.35) обеспечивает, что уравнение (3.31) имеет ровно l_1 корней с отрицательными вещественными частями.

Аналогично, и уравнение (3.32) имеет ровно l_1 корней с отрицательными вещественными частями.

Следовательно, имеет место регулярное вырождение.

2) *Оператор* L_ε — *четного порядка,* L_0 — *нечетного порядка*: $k + l = 2(k_1 + l_1)$, $k = 2k_1 + 1$.

В данном случае, полагая $\eta = \varepsilon\xi$, получим:

$$\varepsilon^{2k_1+1} \tilde{\pi}_\varepsilon(\xi, x) = \sum_{j=1}^{l_1}{}' (-1)^{j+k_1} a_{2(k_1+j)}(x)\, \eta^{2(k_1+j)} \geqslant C_1^2 (\eta^{2(k_1+1)} + \eta^{2(k_1+l_1)}). \tag{3.36}$$

В частности, при $x = 0$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{l_1}{}' (-1)^{j+k_1} a_{2(k_1+j),\,0}\, \eta^{2(k_1+j)} \geqslant C_1^2 (\eta^{2(k_1+l_1)} + \eta^{2(k_1+1)}).$$

Если $(-1)^{k_1} a_{2k_1+1}(x) < 0$, то, в частности, $(-1)^{k_1} a_{2k_1+1,\,0} < 0$. Тогда уравнение

$$Q_0(\lambda) = \sum_{j=1}^{2l_1} a_{2k_1+j,\,0}\, \lambda^{j-1} = 0 \tag{3.37}$$

имеет, в силу леммы 5 (см. ниже), l_1 корней в левой полуплоскости. Уравнение же

$$Q_1(\lambda) = \sum_{j=1}^{2l_1}{}' (-1)^{2k_1+j} a_{2k_1+j,\,1}\, \lambda^{j-1} = 0 \tag{3.37'}$$

имеет младший коэффициент, равный $-a_{2k_1+1,\,1} = -a_{2k_1+1}(1)$, и, следовательно, $(-1)^{k_1}(-a_{2k_1+1,\,1}) > 0$. В силу той же леммы 5 уравнение (3.37′) имеет $l_1 - 1$ корней в левой полуплоскости.

Сравнивая условия (3.30) с (3.3) убеждаемся, что и в этом случае условие регулярности выполнено.

Совершенно аналогично из той же леммы 5 и из условий (3.29) и (3. 3) вытекает регулярность вырождения и в случае $(-1)^{k_1} a_{2k_1+1}(x) > 0$.

3) *Оператор* L_ε — *нечетного порядка, а* L_0 — *четного порядка*: $k + l = 2(k_1 + l_1) + 1$, $k = 2k_1$.

В данном случае уравнение (3.31) имеет вид

$$Q_0(\lambda) = \sum_{j=0}^{2l_1+1} a_{2k_1+j,\,0}\,\lambda^j = 0.$$

Условие (3.33) имеет тот же вид, как в случае 1), и так же, как там (так как $(-1)^{k_1} a_{2k_1} > 0$), выполняется неравенство (3.35).

Отсюда и из леммы 6 (см. ниже стр. 52) следует: при $(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1} > 0$ уравнение $Q_0(\lambda) = 0$ имеет ровно l_1+1 корней в левой полуплоскости, а уравнение $Q_1(\lambda) = 0$, для которого старший коэффициент $(-1)^{2l_1+1} a_{2(k_1+l_1)+1}$, имеет l_1 корней в левой полуплоскости. Отсюда и из граничных условий (3.4) и (3.27) вытекает регулярность вырождения.

4) $k = 2k_1+1$, $l = 2l_1$. Здесь надо воспользоваться леммой 7 (см. ниже стр. 52). Уравнение $Q_0(\lambda) = 0$ в силу этой леммы имеет столько корней в левой полуплоскости, сколько указано в формуле (3.48).

Для уравнения $Q_1(\lambda) = 0$ младший коэффициент равен $-a_{2k_1+1}$, старший равен $-a_{2(k_1+l_1)+1}$ (см. (1.30), (2.8′)). Поэтому случаю а) формул (3.48) для уравнения $Q_0(\lambda) = 0$ отвечает случай б) для уравнения $Q_1(\lambda) = 0$ и обратно; случаю в) для уравнения $Q_0(\lambda) = 0$ — случай г) для уравнения $Q_1(\lambda) = 0$ и обратно.

Сравнивая во всех четырех возможных случаях условия (3.4) или (3.5) с условиями (3.29) или (3.30), убеждаемся, что всегда имеет место регулярность вырождения задачи A_ε в задачу A_0.

Итак, мы доказали, *что выполнение условий теоремы* 4 *или* 4′, 4″, 4‴ *является достаточным для регулярности вырождения.* Мы установили тем самым следующее предложение:

Теорема 5. *В условиях теоремы* 4 *или* 4′, 4″, 4‴, *если для оператора* L_0 *задаются указанные выше граничные условия* (3.27) *или* (3.29) *или* (3.30), *задача* A_ε *разрешима, она регулярно вырождается в задачу* A_0 *и для ее решения* u_ε *справедлива асимптотика, указанная формулой* (2.35).

3. Основные алгебраические предложения о числе корней с отрицательными вещественными частями дополнительного характеристического уравнения. Изучим вопрос о числе корней с отрицательными вещественными частями дополнительного характеристического уравнения

$$Q^{(k,\,l)}(t) = \sum_{j=k}^{k+l} a_j\, t^{j-k} = 0 \quad (a_k \neq 0,\ a_{k+l} \neq 0). \tag{3.38}$$

С помощью этих корней мы строили пограничные слои в § 2.

Сделаем сначала два общих замечания.

Замечание 1. Если стремить свободный член a_k в уравнении (3.38) к нулю, фиксируя остальные коэффициенты a_j $(j > k)$ и считая $a_{k+1} \neq 0$, то лишь один из корней уравнения (3.38) λ_0 стремится к нулю вместе с a_k и

$$\lambda_0 \approx -\frac{a_k}{a_{k+1}}, \quad \operatorname{Re}\lambda_0 \approx -\frac{a_k}{a_{k+1}}. \tag{3.39}$$

Отсюда при достаточно малом a_k

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} \lambda_0 = -\operatorname{sign} \frac{a_k}{a_{k+1}}.$$

Замечание 2. Если старший коэффициент a_{k+l} в (3.38) стремить к нулю, фиксируя все остальные коэффициенты a_j, $j < k+l$, то при $a_{k+l-1} \neq 0$ уравнение (3.38) имеет один корень μ_0, стремящийся к бесконечности при $a_{k+l} \to 0$, и этот корень эквивалентен

$$\mu \approx -\frac{a_{k+l-1}}{a_{k+l}}, \quad \operatorname{Re} \mu \approx -\frac{a_{k+l-1}}{a_{k+l}}.$$

Отсюда при достаточно малом a_{k+l}

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} \mu = -\operatorname{sign} \frac{a_{k+l-1}}{a_{k+l}}. \tag{3.40}$$

Относительно многочлена $t^k Q^{(k,\, l)}(t)$ предположим, что при $t = i\xi$, $\operatorname{Im} \xi = 0$, его вещественная часть положительна, точнее:

$$\operatorname{Re} (i\xi)^k Q^{(k,\, l)}(i\xi) \equiv \sum_{k \leqslant 2j \leqslant k+l} (-1)^j a_{2j} \xi^{2j} \geqslant C^2 (\xi^{2m} + \xi^{2M}), \tag{3.41}$$

где $2m$ и $2M$ — наименьшее и, соответственно, наибольшее из четных чисел $2j$, для которых $k \leqslant 2j \leqslant k+l$. Из (3.41), очевидно, вытекает, что

$$(-1)^m a_{2m} > 0 \quad \text{и} \quad (-1)^M a_{2M} > 0. \tag{3.42}$$

Рассмотрим 4 случая и докажем 4 алгебраические леммы:

Лемма 4. *Пусть $k = 2k_1 = 2m$ и $k + l = 2(k_1 + l_1) = 2M$ — числа четные. При выполнении условия* (3.41) *уравнение* (3.38) *имеет ровно l_1 корней в левой полуплоскости.*

Действительно, в этом случае

$$Q^{(k,\, l)}(t) = Q^{(2k_1,\, 2l_1)}(t) = Q_2(t^2) + tQ_3(t^2),$$

где

$$Q_2(t^2) = \sum_{j=0}^{l_1} a_{2(k_1+j)} t^{2j}, \quad Q_3(t^2) = \sum_{j=0}^{l_1-1} a_{2(k_1+j)+1} t^{2j}.$$

Обозначим $Q_\tau^{(k,\, l)}(t) = Q_2(t^2) + \tau t Q_3(t^2)$. В силу (3.41) на мнимой оси

$$(-1)^{k_1} \operatorname{Re} Q_\tau^{(k,\, l)}(i\xi) = (-1)^{k_1} Q_2(-\xi^2) = \sum_{j=k_1}^{k_1+l_1} (-1)^j a_{2j} \xi^{2(j-k_1)} \geqslant C^2 (1 + \xi^{2l_1}) > 0.$$

Отсюда ясно, что при любом вещественном τ уравнение

$$Q_\tau^{(k,\, l)}(t) = 0 \tag{3.43}$$

не имеет корней на мнимой оси. Поэтому, если τ меняется от 0 до 1, корни уравнения (3.43), непрерывно меняясь, не пересекают мнимую ось. Так как коэффициент $a_{2(k_1+l_1)}$ при старшей степени фиксирован и отличен от нуля, то корни уравнения (3.43) при изменении τ не уходят в бесконечность. Отсюда следует, что число корней уравнения (3.43), лежащих в левой полуплоскости, не меняется при изменении τ. При $\tau = 0$ уравнение (3.43) принимает вид

$$Q_0^{(k,\, l)}(t) \equiv Q_2(t^2) \equiv \sum_{j=0}^{l_1} a_{2(k_1+j)} t^{2j} = 0$$

и, следовательно, имеет l_1 пар корней $(\lambda_i, -\lambda_i)$. Поэтому оно имеет ровно l_1 корней в левой полуплоскости. В силу сказанного выше уравнение (3.43) при любом τ имеет l_1 корней в левой полуплоскости. В частности, исходное уравнение (3.38), отвечающее значению $\tau=1$, имеет l_1 корней в левой полуплоскости.

Лемма 5. *Если $k=2k_1+1$ — число нечетное, $k+l=2(k_1+l_1)$ — число четное, и выполнено условие* (3.41), *то уравнение* (3.38) *имеет в левой полуплоскости l_1 корней при $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$ и l_1-1 корней при $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$.*

Имеем:

$$Q^{(k,\,l)}(t)=Q^{(2k_1+1,\ 2l_1-1)}(t)=tQ_4(t^2)+Q_5(t^2)+a_{2k_1+1}, \tag{3.44}$$

причем теперь мы обозначили:

$$Q_4(t^2)=\sum_{j=1}^{l_1}a_{2(j+k_1)}t^{2(j-1)},\qquad Q_5(t^2)=\sum_{j=1}^{l_1-1}a_{2(k_1+j)+1}t^{2j}.$$

В силу (3.41), на мнимой оси $(t=i\xi)$

$$\operatorname{Im}Q^{(k,\,l)}(i\xi)=\xi Q_4((i\xi)^2)=\xi\sum_{j=1}^{l_1}(-1)^{j-1}a_{2(j+k_1)}\xi^{2(j-1)}\neq 0 \text{ при } \xi\neq 0. \tag{3.45}$$

Отсюда следует, что *при $a_{2k_1+1}\neq 0$ уравнение* (3.38) *в нашем случае не имеет корней на мнимой оси.* Из (3.42) вытекает, что $(-1)^{k_1+1}a_{2k_1+2}>0$, так как сейчас $m=k_1+1$.

Фиксируем теперь все коэффициенты a_s $(s>2k_1+1)$, кроме a_{2k_1+1}, и будем менять последний. При $a_{2k_1+1}=0$ имеем:

$$Q^{(k,\,l)}(t)\big|_{a_{2k_1+1}=0}=Q^{(2k_1+1,\ 2l_1-1)}(t)\big|_{a_{2k_1+1}=0}=tQ^{(2(k_1+1),\ 2(l_1-1))}(t),$$

и, следовательно, в этом случае уравнение $Q^{(k,\,l)}(t)\big|_{a_{2k_1+1}=0}=tQ^{(2(k_1+1),\ 2(l_1-1))}(t)=0$ имеет один простой корень, равный 0, и остальные корни, удаленные от 0 на конечное расстояние. В силу (3.45) и (3.41) многочлен $Q^{(2(k_1+1),\ 2(l_1-1))}(t)$ на мнимой оси $t=i\xi$ отличен от нуля, и, согласно доказанному в лемме 4, имеет ровно l_1-1 корней в левой полуплоскости. Следовательно, и многочлен $Q^{(2k_1+1,\ 2l_1-1)}(t)$ при $a_{2k_1+1}=0$ имеет в левой полуплоскости l_1-1 корней. Если a_{2k_1+1} начинает меняться, двигаясь по положительной или соответственно по отрицательной действительной полуоси, то, согласно замечанию 1, нулевой корень при малом a_{2k_1+1} переходит в близкий к нулю корень λ_0, для которого в силу (3.39)

$$\operatorname{sign}\operatorname{Re}\lambda_0=-\operatorname{sign}\frac{a_k}{a_{k+1}}=-\operatorname{sign}\frac{a_{2k_1+1}}{a_{2k_1+2}}.$$

Так как $(-1)^{k_1+1}a_{2k_1+2}>0$, то $\operatorname{sign}\operatorname{Re}\lambda_0=(-1)^{k_1}\operatorname{sign}a_{2k_1+1}$, т. е. малый корень λ_0 расположен в левой полуплоскости при $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$ и в правой при $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$. При дальнейшем изменении положения a_{2k_1+1} на положительной или отрицательной полуоси и фиксированных остальных коэффициентах корни уравнения (3.38) не могут пересекать мнимую ось и не уходят в бесконечность (так как старший коэффициент $a_{2(k_1+l_1)}\neq 0$

в силу (3.42)). Поэтому число корней в левой полуплоскости остается равным l_1 или $l_1 - 1$ в зависимости от знака $(-1)^{k_1} a_{2k_1+1}$.

Лемма 6. *Пусть $k = 2k_1$ — число четное, $l = 2l_1 + 1$ — число нечетное. В этом случае при выполнении условия* (3.41) *уравнение* (3.38) *имеет в левой полуплоскости $l_1 + 1$ корней при $(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1} > 0$ и l_1 корней при $(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1} < 0$.*

Для доказательства будем считать старший коэффициент $a_{k+l} = a_{2(k_1+l_1)+1}$ переменным, а остальные фиксированными. Имеем:

$$Q^{(k,\,l)}(t) = Q^{(2k_1,\,2l_1+1)}(t) = Q^{(2k_1,\,2l_1)}(t) + a_{2(k_1+l_1)+1} t^{2l_1+1}.$$

Согласно (3.42) в нашем случае коэффициент $(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)} > 0$. Поэтому согласно замечанию 2 при стремлении к нулю $a_{k+l} = a_{2(k_1+l_1)+1}$ один из корней уравнения (3.38) становится бесконечным, остальные корни — конечные и при $a_{2(k_1+l_1)+1} = 0$ совпадают с корнями уравнения $Q^{(2k_1,\,2l_1)}(t) = 0$. В силу условия (3.41) и доказанного в лемме 4 утверждения, среди корней ровно l_1 лежат в левой полуплоскости.

Будем теперь, исходя от нуля, двигать коэффициент $a_{k+l} = a_{2(k_1+l_1)+1}$ по положительной (соответственно по отрицательной) вещественной полуоси. При малых значениях a_{k+l} мы наряду с $2(k_1 + l_1)$ конечными корнями, в силу замечания 2, будем иметь большой корень μ, для которого в силу (3.40):

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} \mu = -\operatorname{sign} \frac{a_{2(k_1+l_1)}}{a_{2(k_1+l_1)+1}}. \tag{3.46}$$

Так как $(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)} > 0$, то (3.46) принимает вид

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} \mu = (-1)^{k_1+l_1+1} \operatorname{sign} a_{2(k_1+l_1)+1}; \tag{3.47}$$

при $(-1)^{k_1+l_1+1} a_{2(k_1+l_1)+1} > 0$ $((-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1} < 0)$ большой корень μ расположен в правой полуплоскости, а в левой полуплоскости расположено всего l_1 корней. При $(-1)^{k_1+l_1+1} a_{2(k_1+l_1)+1} < 0$ $((-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1} > 0)$ большой корень μ расположен в левой полуплоскости, и в левой полуплоскости будет $l_1 + 1$ корней.

При дальнейшем перемещении $a_{2(k_1+l_1)+1}$ по положительной или по отрицательной полуоси число корней в левой полуплоскости, как и в предыдущих случаях, не меняется.

Лемма 7. *Если $k = 2k_1 + 1$ и $k + l = 2(k_1 + l_1) + 1$ — числа нечетные и выполнено* (3.41), *то уравнение* (3.38) *имеет число корней, расположенных в левой полуплоскости, равное*

$$\left.\begin{array}{lll} \text{а)}\ l_1 & \textit{при} & (-1)^{k_1} a_{2k_1+1} > 0,\ (-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1} > 0, \\ \text{б)}\ l_1 & \textit{при} & (-1)^{k_1} a_{2k_1+1} < 0,\ (-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1} < 0, \\ \text{в)}\ l_1 - 1 & \textit{при} & (-1)^{k_1} a_{2k_1+1} > 0,\ (-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1} < 0, \\ \text{г)}\ l_1 + 1 & \textit{при} & (-1)^{k_1} a_{2k_1+1} < 0,\ (-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1} > 0. \end{array}\right\} \tag{3.48}$$

Этот случай сводится к случаю, разобранному в лемме 5, как предыдущий случай — к случаю, разобранному в лемме 4. Представим многочлен $Q^{(k,\,l)}(t) = Q^{(2k_1+1,\,2l_1)}(t)$ в виде $Q^{(k,\,l)}(t) = Q^{(2k_1+1,\,2l_1-1)}(t) + a_{2(k_1+l_1)+1}\,t^{2l_1}$.

Будем считать коэффициент $a_{k+l} = a_{2(k_1+l_1)+1}$ переменным, а остальные коэффициенты фиксированными. Согласно (3.42) $(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)} > 0$ $(M = k_1 + l_1)$ и, следовательно, согласно замечанию 2, при $a_{2(k_1+l_1)+1} = 0$ уравнение (3.38) имеет один бесконечный корень (т. е. при $a_{k+l} \to 0$, $\mu \to \infty$) и конечные корни, совпадающие с корнями уравнения $Q^{(2k_1+1,\,2l_1-1)}(t) = 0$. Среди этих корней, в силу доказанного в лемме 5, l_1 или $l_1 - 1$ корней расположено в левой полуплоскости, в зависимости от знака $(-1)^{k_1} a_{2k_1+1}$.

Если теперь коэффициент $a_{2(k_1+l_1)+1}$ передвигать от нулевого значения по положительной или по отрицательной вещественной полуоси, то для большого корня μ выполняется равенство (3.40), при этом, так как в силу (3.42) $(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)} > 0$, то

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} \mu = -\operatorname{sign} \frac{a_{2(k_1+l_1)}}{a_{2(k_1+l_1)+1}} = -(-1)^{k_1+l_1} \operatorname{sign} a_{2(k_1+l_1)+1}.$$

При $(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+1)+1} > 0$ μ имеет отрицательную вещественную часть, и, следовательно, в левой полуплоскости появляется дополнительный корень, при обратном неравенстве этот корень не появляется. При дальнейшем движении $a_{2(k_1+l_1)+1}$ вдоль положительной или вдоль отрицательной полуоси число корней в левой полуплоскости не изменяется, так как эти корни не могут перейти, как и выше, через мнимую ось.

Итак, при $(-1)^{k_1} a_{2k_1+1} > 0$, согласно лемме 5, уравнение $Q^{(2k_1+1,\,2l_1-1)}(t) = 0$ имеет $l_1 - 1$ корней в левой полуплоскости, а при $(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1} > 0$, согласно сказанному выше, к этим корням прибавляется еще один большой корень μ с $\operatorname{Re} \mu < 0$, и первый случай (3.48) установлен. Аналогично проверяем все другие соотношения (3.48).

§ 4. Эллиптические уравнения второго порядка с малым параметром при старших производных

1. Примеры погранслоя в случае уравнений в частных производных. а) Для уравнений в частных производных, содержащих параметры при старших производных, очевидно, наблюдается также явление пограничного слоя, если только выполнены некоторые условия, аналогичные условию регулярности для обыкновенных уравнений. Начнем с самых простых примеров.

Пусть в прямоугольнике Q: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ дано дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + u(x, y) = h(x, y) \tag{4.1}$$

и, кроме того, задано начальное условие

$$u\,|_{x=0} = 0. \tag{4.2}$$

Решение $u_\varepsilon(x, y)$ задачи Коши (4.1), (4.2) дается формулой

$$u_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{x-x_1}{\varepsilon}} h(x_1, y)\,dx_1. \tag{4.3}$$

Если функция $h(x, y)$ имеет ограниченную производную по x в $\overline{Q}$, то

$$u_\varepsilon(x, y) = h(x_1, y)\, e^{-\frac{x-x_1}{\varepsilon}}\Big|_{x_1=0}^{x_1=x} - \int_0^x \frac{\partial h(x_1, y)}{\partial x} e^{-\frac{x-x_1}{\varepsilon}}\,dx_1 =$$

$$= h(x, y) - h(0, y)\, e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - \int_0^x \frac{\partial h(x_1, y)}{\partial x} e^{-\frac{x-x_1}{\varepsilon}}\,dx_1. \tag{4.4}$$

Заметим теперь, что $w = h(x, y)$ является решением вырожденного уравнения

$$L_0 w \equiv w = h(x, y), \tag{4.5}$$

полученного из (4.1) при $\varepsilon = 0$. Очевидно, функция $w(x, y) = h(x, y)$, вообще говоря, не удовлетворяет начальному условию (4.2), так как $w|_{x=0} = h(0, y)$.

Слагаемое

$$v_\varepsilon = -h(0, y)\, e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \tag{4.6}$$

имеет характер пограничного слоя, т. е. функции, заметно отличной от нуля лишь вблизи части границы Q (левой стороны прямоугольника Q). Кроме того,

$$v_\varepsilon|_{x=0} = -h(0, y) = -w|_{x=0}, \tag{4.7}$$

и, таким образом, сумма решения w вырожденного уравнения (4.5) и пограничного слоя (4.6) удовлетворяет граничному условию (4.2):

$$(w + v_\varepsilon)|_{x=0} = 0.$$

Справа в (4.4) имеется еще третье слагаемое. Обозначим его через $z(x, y)$ и оценим по модулю:

$$|z(x, y)| = \left|\int_0^x \frac{\partial h}{\partial x} e^{-\frac{x-x_1}{\varepsilon}}\,dx_1\right| \leqslant M\int_0^x e^{-\frac{x-x_1}{\varepsilon}}\,dx_1 = M\varepsilon\,(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}),$$

где $M = \max\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|$. Итак, решение задачи Коши $u_\varepsilon(x, y)$ мы можем представить в виде суммы:

$$u_\varepsilon(x, y) = w(x, y) + v_\varepsilon(x, y) + z(x, y), \tag{4.8}$$

где $w(x, y)$ — решение вырожденного уравнения (4.5), $v_\varepsilon(x, y)$ — функция типа пограничного слоя, а $z(x, y) = O(\varepsilon)$.

Производя дальнейшее интегрирование по частям в правой части (4.4), если $h(x, y)$ — достаточно гладкая функция, мы сможем получить более точную асимптотику $u_\varepsilon(x, y)$, с остаточным членом $z_n(x, y) = O(\varepsilon^n)$.

б) Пусть в круге Q: $0 \leqslant \rho < 1$ дано уравнение

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \Delta u - u = h \tag{4.9}$$

при однородных граничных условиях

$$u|_{\rho=1}=0. \tag{4.10}$$

По аналогии с рассмотрениями § 2 найдем асимптотику решения $u_\varepsilon(x, y)$ задачи (4.9), (4.10) при малых ε, $\varepsilon>0$. Первым членом этой асимптотики является функция $w(x, y)=-h(x, y)$ — решение вырожденного уравнения

$$L_0 w \equiv -w=h. \tag{4.11}$$

Эта функция w не удовлетворяет, вообще говоря, граничному условию (4.10), и, следовательно, разность $u_\varepsilon-w$, вообще говоря, не является малой вблизи Γ относительно ε. Оказывается, что она имеет характер пограничного слоя. Для того чтобы найти его, запишем уравнение (4.9) в координатах (r, φ), где $r=1-\rho$, а (ρ, φ) — полярные координаты. Мы получим:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\left(\frac{1}{1-r}\right)\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{(1-r)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)-u=h. \tag{4.12}$$

Разность $\bar{v}=u_\varepsilon-w$ удовлетворяет уравнению

$$L_\varepsilon \bar{v}=-\varepsilon^2\Delta w \tag{4.13}$$

и граничным условиям

$$\bar{v}|_{r=0}=(u_\varepsilon-w)|_{r=0}=-w|_{r=0}=-w(0, \varphi)=h(0, \varphi). \tag{4.14}$$

Для приближенного нахождения функции $\bar{v}$ достаточно решить вместо уравнения (4.13) *обыкновенное по r* уравнение

$$Mv \equiv \varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-v=0 \tag{4.14'}$$

при граничном условии (4.14) и требовании быстрого убывания к нулю при $\frac{r}{\varepsilon}\gg 1$.

Действительно, если сделать замену переменного $t=\frac{r}{\varepsilon}$ в операторе L_ε, то получим:

$$L_\varepsilon v=Mv+\varepsilon R_1 v+\varepsilon^2 R_2 v+\ldots,$$

где

$$Mv \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-v, \quad R_1 v \equiv -\frac{\partial v}{\partial t}, \ \ldots,$$

и, следовательно, уравнение (4.14') получается как уравнение для первого приближения к решению $\bar{v}$ уравнения (4.13).

Решением уравнения (4.14') типа погранслоя (т. е. бесконечно малым при $t\to\infty$), удовлетворяющим условию (4.14), является функция

$$v=-w(0, \varphi)\,e^{-\frac{r}{\varepsilon}}=-w(0, \varphi)\,e^{-t}. \tag{4.15}$$

Как мы сейчас увидим, сумма функции w (т. е. решения уравнения (4.11)) и самого элементарного пограничного слоя v_ε, полученного умножением v на сглаживающий множитель $\psi(\rho)$, даст в первом приближении асимптотику u_ε во всей области $\bar{Q}$. Действительно, для невязки $z=u_\varepsilon-w-v_\varepsilon$ имеем:

$$L_\varepsilon z=h-h-\varepsilon^2\Delta w+O(\varepsilon)=O(\varepsilon). \tag{4.16}$$

Так как $z|_{r=0}=0$, то, в силу принципа максимума, из (4.16) выводим, что и $z=O(\varepsilon)$. Следовательно,

$$u_\varepsilon = w + v_\varepsilon + z, \quad z = O(\varepsilon). \tag{4.17}$$

Замечание. Отметим, что если бы мы вместо уравнения (4.14′) для определения функции v взяли уравнение

$$M^{(1)}v \equiv \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{\partial v}{\partial r}\right) - v = 0,$$

то в (4.17) мы получили бы $O(\varepsilon^2)$ вместо $O(\varepsilon)$.

В § 7 нами будут рассмотрены общие эллиптические уравнения с малыми параметрами, вырождающиеся в эллиптические же уравнения, и будут выведены асимптотики для u_ε с остаточным членом любого порядка малости: $O(\varepsilon^s)$.

2. Рассмотрим теперь подробнее общее эллиптическое уравнение второго порядка, содержащее малый параметр при старших производных. Так как обобщение приведенных ниже выкладок на случай n переменных не представляет никакого труда, мы будем вести основное изложение для случая двух независимых переменных.

Пусть дан линейный эллиптический дифференциальный оператор L_ε, который с помощью замены независимых переменных может быть представлен в виде

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon L_2 u + L_1 u, \tag{4.18}$$

где

$$L_2 u \equiv a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u \qquad (a(x, y) > 0), \tag{4.19}$$

$$L_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - f(x, y)u, \quad \underline{f(x, y) \geqslant \alpha^2 > 0}. \tag{4.20}$$

Пусть Q — плоская область, Γ — ее граница.

Будем называть задачей A_ε решение уравнения

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = h(x, y) \tag{4.21}$$

при условии

$$u_\varepsilon|_\Gamma = 0. \tag{4.22}$$

В силу того, что $f(x, y) \geqslant \alpha^2$, эта задача при малых ε всегда имеет, и притом единственное, решение.

Будем называть параметрами задачи A_ε правую часть, коэффициенты уравнения (4.21) и границу области. Мы скажем, что параметры задачи имеют гладкость s, если указанные функции и граница s раз дифференцируемы.

Рассмотрим также вырожденное уравнение

$$L_1 w = h. \tag{4.23}$$

Его характеристики суть прямые $y=\mathrm{const}$. Для простоты мы предположим, что лишь две характеристики $y=y_0$ и $y=y_1$ $(y_1 > y_0)$ касаются границы Γ, так что Q лежит в полосе $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, и пусть $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ — точки касания этих характеристик с Г. Точки A и B разбивают Г на две дуги: Γ^+ и Γ^-, такие, что характеристика $y=c$ $(y_0<c<y_1)$ при возрастании x пересекает сначала Γ^-, потом Γ^+, образуя с Г углы, отличные от 0 и π.

Задача A_0 заключается в решении задачи Коши для уравнения (4.23) при начальном условии

$$w|_{\Gamma^+}=0. \tag{4.24}$$

Решение w задачи A_0 дается формулой

$$w(x, y)=\int\limits_{x_1(y)}^{x} e^{\int\limits_t^x f(\tau, y)\,d\tau} h(t, y)\,dt, \tag{4.25}$$

где $x=x_1(y)$ — уравнение Γ^+.

Пусть Г имеет с крайней характеристикой $y=y_0$ (соответственно $y=y_1$) порядок касания $p-1$ (соответственно $q-1$). Тогда вблизи точки $A(x_0, y_0)$ (соответственно $B(x_1, y_1)$) имеем:

$$\begin{gathered} x_1(y)-x_0=C\left[(y-y_0)^{\frac{1}{p}}+o(y-y_0)\right], \\ \frac{dx_1}{dy}=O\left((y-y_0)^{\frac{1}{p}-1}\right), \ \frac{d^2x_1}{dy^2}=O\left((y-y_0)^{\frac{1}{p}-2}\right), \end{gathered} \tag{4.26}$$

и аналогичные формулы имеют место в окрестности точки B. Из (4.25) видно, что если функции $f(x, y)$ и $h(x, y)$ имеют в Q непрерывные производные до порядка r и $x_1(y)$ имеет при $y_0<y<y_1$ непрерывные производные до порядка r, то и у функции $w(x, y)$ будут непрерывными все производные до порядка r по обеим переменным в любой подобласти $\overline{Q}-V(A)-V(B)$, где $V(C)$ — окрестность точки C, и даже все производные $r+1$-го порядка, кроме $\frac{\partial^{r+1}w}{\partial y^{r+1}}$. Однако в силу (4.26) в точках A и B производные по y от w имеют особенности, а именно, дифференцируя (4.25) по y, получим в окрестности точки A:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y}&=\int\limits_{x_1(y)}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\int\limits_t^x f(\tau, y)\,d\tau} h(t, y)\right]dt- \\ &-e^{\int\limits_{x_1(y)}^x f(\tau, y)\,d\tau} h(x_1(y), y)\,x_1'(y)=O(x_1'(y))=O\left((y-y_0)^{\frac{1}{p}-1}\right), \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=O\left(\frac{d^2x_1(y)}{dy^2}\right)=O\left((y-y_0)^{\frac{1}{p}-2}\right)$$

и аналогичные формулы в окрестности точки B.

Ниже мы исследуем асимптотику разности $u_\varepsilon-w$, где u_ε — решение задачи A_ε, а w — решение задачи A_0, методами, применявшимися в § 2.

3. Основной итерационный процесс для уравнений второго порядка. Введем в окрестности Γ^- систему координат (ρ, φ), именно строим систему «трансверсалей», т. е. векторов $\overline{PR}$ длины $\eta>0$, проведенных из точек P дуги Γ^- внутрь Q с гладкостью $2m$, причем $\overline{PR}$

образует острый угол θ с осью Ox, $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta_1$. При достаточно малом η трансверсали не пересекаются; координата ρ точки S трансверсали $\overline{PR}$ есть ее расстояние PS, а φ есть длина части $\overset{\smile}{AP}$ дуги Γ^-. В новых координатах в окрестности Γ^-

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon\left(\alpha(\rho, \varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + 2\beta(\rho, \varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\varphi} + \gamma(\rho, \varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \omega(\rho, \varphi)\frac{\partial u}{\partial\rho} + \right.$$
$$\left. + \mu(\rho, \varphi)\frac{\partial u}{\partial\varphi} + g(\rho, \varphi)u\right) + \varkappa(\rho, \varphi)\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \delta(\rho, \varphi)\frac{\partial u}{\partial\rho} - f(\rho, \varphi)u. \quad (4.28)$$

Поскольку коэффициенты оператора L_ε достаточно гладкие, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(\rho, \varphi) = \alpha_0(\varphi) + \alpha_1(\varphi)\rho + \ldots + \alpha_N(\varphi)\rho^N + \alpha_{N+1}(\rho, \varphi)\rho^{N+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\delta(\rho, \varphi) = \delta(\varphi) + \delta_1(\varphi)\rho + \ldots + \delta_N(\varphi)\rho^N + \delta_{N+1}(\rho, \varphi)\rho^{N+1}, \\ &\delta(\varphi) \geqslant \delta_0^2 > 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.29)$$

(В том случае, когда ρ совпадает с нормалью n, $\delta(\varphi) = \cos(n, x)|_\Gamma$.) Введем новое переменное $t = \frac{\rho}{\varepsilon}$; тогда $\frac{d^s}{d\rho^s} = \frac{1}{\varepsilon^s}\frac{d^s}{dt^s}$. Поэтому по аналогии с формулой (2.9) § 2 имеем:

$$\varepsilon L_\varepsilon u \equiv M_0 u + \varepsilon R_1 u + \ldots + \varepsilon^N R_N u + \varepsilon^{N+1} R_{N+1} u, \quad (4.30)$$

где

$$M_0 u \equiv \alpha(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \delta(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t} \equiv \varepsilon^2\alpha(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \varepsilon\delta(\varphi)\frac{\partial u}{\partial\rho},$$
$$R_1 u \equiv \alpha_1(\varphi)t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial\varphi} + \omega(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t} + \varkappa(\varphi)\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \delta_1(\varphi)t\frac{\partial u}{\partial t} - f(\varphi)u \quad (4.31)$$

и аналогично выражается оператор $R_i u$ $(1 < i \leqslant N)$, причем в его коэффициенты входят множителями t^j, $j \leqslant i$ (ср. § 2), а R_{N+1} — оператор, коэффициенты которого представляют собою члены вида: $t^k H(\rho, \varphi)$, $k \leqslant N+1$, где H — ограниченная функция.

Так же, как в § 2, построим функцию $v_0\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) = v_0(t, \varphi)$ типа погранслоя в окрестности Γ^-, именно v_0 есть решение уравнения

$$M_0 v_0 \equiv \alpha(\varphi)\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \delta(\varphi)\frac{\partial v_0}{\partial t} = 0 \quad (4.32)$$

с не зависящими от t коэффициентами: $\alpha(\varphi) \geqslant \alpha_0^2 > 0$ (в силу эллиптичности (4.28)), $\delta(\varphi) \geqslant \delta_0^2 > 0$. Характеристическим уравнением для (4.32) будет

$$Q_\varphi(\lambda) \equiv \alpha(\varphi)\lambda^2 + \delta(\varphi)\lambda = 0.$$

Это уравнение имеет для любой точки $\varphi \in \Gamma^-$ один корень: $-\lambda_1(\varphi) = -\frac{\delta(\varphi)}{\alpha(\varphi)}$ в левой полуплоскости (т. е. столько, сколько условий задачи A_ε выпадает на Γ^- при переходе к задаче A_0). В этом заключается условие регулярности вырождения задачи A_ε в задачу A_0 (ср. § 1, 2). Отрицательному корню $-\lambda_1(\varphi)$ отвечает частное решение уравнения (4.32) типа погранслоя:

$$v = \exp[-\lambda_1(\varphi)t] = \exp\left[-\frac{\lambda_1\rho}{\varepsilon}\right]. \quad (4.33)$$

Мы теперь потребуем, чтобы v_0 удовлетворяло на Γ^- условию

$$v_0|_{t=0} = v_0|_{\rho=0} = -w(0, \varphi) \tag{4.33'}$$

(v_0 компенсирует невязку для w в граничном условии (4.22) задачи A_ε на Γ^-). Очевидно,

$$v_0 = -w(0, \varphi) \exp(-\lambda_1(\varphi) t) = -w(0, \varphi) \exp\left(-\lambda_1(\varphi) \frac{\rho}{\varepsilon}\right). \tag{4.33''}$$

Пусть уже найдены w_j и v_j при $j < i$, $i \leqslant N$. Совершенно аналогично тому, как сделано в формуле (2.22) § 2, определим w_i как решение уравнения

$$L_1 w_i = -L_2 w_{i-1} \tag{4.34}$$

(в данном случае в правой части (2.22) только одно слагаемое и отсутствуют α_j) при граничных условиях

$$w_i|_{\Gamma^+} = 0. \tag{4.34'}$$

Далее, v_i определяется как решение уравнения с постоянными относительно t коэффициентами, аналогичного (2.23):

$$M_0 v_i = -\sum_{s=1}^{i} R_s v_{i-s} \tag{4.35}$$

при условиях, что v_i есть функция типа погранслоя и удовлетворяет условию

$$v_i|_{\Gamma^-} = -w_i|_{\Gamma^-}. \tag{4.36}$$

Предполагая по индукции, что v_j при $j < i$ имеют вид: $v_j = P_j(t, \varphi) \exp(-\lambda_1 t)$, где P_j – многочлен от t степени $\leqslant j$ с коэффициентами, зависящими от φ (это условие выполняется при $j = 0$), находим, как это было сделано в § 2, что

$$v_i = P_i(t, \varphi) \exp(-\lambda_1 t) = P_i\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) \exp\left(-\lambda_1 \frac{\rho}{\varepsilon}\right). \tag{4.37}$$

Найдя w_i и v_i при $i \leqslant m$, определим v_{m+1} как решение уравнения (4.35) при $i = m+1$ и граничном условии

$$v_{m+1}|_{\Gamma^-} = 0.$$

Можем теперь положить в (4.29) и (4.30) $N = m+1$.

Обозначив через z_m невязку

$$z_m = u_\varepsilon - w_0 - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i w_i - \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^j v_j,$$

имеем:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon z_m = L_\varepsilon u_\varepsilon - L_\varepsilon \Big(w_0 + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i w_i\Big) - L_\varepsilon \Big(\sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^j v_j\Big) = \\ = h - \Big\{L_1 w_0 + L_1 \Big(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i w_i\Big) + \varepsilon L_2 \Big(\sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i w_i\Big)\Big\} - \\ - \Big\{\varepsilon^{-1} \Big[\Big(M_0 + \sum_{s=1}^{m+2} \varepsilon^s R_s\Big) \sum_{r=0}^{m+1} \varepsilon^r v_r\Big\}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Формулы (4.34) показывают, что все члены при ε^i, $i \leqslant m$, в первых фигурных скобках сокращаются, а формулы (4.35) показывают, что они сокращаются и во вторых фигурных скобках при $i \leqslant m+1$. Тем самым ясно, что в правой части (4.38) стоит выражение вида $\varepsilon^{m+1}\bar{g}_m$, где

$$\bar{g}_m = -L_2 w_m - (R_{m+2}v_0 + R_{m+1}v_1 + \ldots + R_1 v_{m+1}) + \ldots \qquad (4.39)$$

Функции v_i определены в Q_η[1]), а значит, и формула (4.38) имеет смысл только в полоске Q_η. Можно определить эти функции всюду в Q, считая их равными 0 вне Q_η, а в Q_η умножить их на сглаживающую функцию $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$ (равную 1 при $\rho \leqslant \frac{\eta}{3}$, равную 0 при $\rho \geqslant \frac{2}{3}\eta$ и бесконечно дифференцируемую). Сохраним обозначения v_i для $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)v_i$. Невязка z_m и формула (4.38) теперь уже определены всюду в Q, однако вид правых частей (4.38) и (4.39) несколько изменится. Из формул для новой невязки z_m видно, что $L_\varepsilon z_m$ в $Q_{\frac{\eta}{3}} - V(A) - V(B)$ — ограниченная функция при условиях достаточной гладкости параметров задачи: в $Q_{\frac{\eta}{3}}$ $\psi = 1$ и вид (4.38) и (4.39) не изменится. При $\rho > \frac{\eta}{3}$ функции $\exp\left(-\lambda_i \frac{\rho}{\varepsilon}\right)$ и их любые производные стремятся к нулю быстрее, чем любая степень ε. То же будет иметь место и для $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)\exp\left(-\lambda_i\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$, а значит, для функций v_i. Следовательно, при $\eta \geqslant \rho > \frac{\eta}{3}$ $L_\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{m+1}\varepsilon^i v_i\right)$ будет функцией порядка малости выше ε^{m+1}; на $Q - Q_\eta$ $L_\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{m+1}\varepsilon^i v_i\right) \equiv 0$.

Таким образом, всюду в $Q - V(A) - V(B)$ имеем:

$$L_\varepsilon z_m = \varepsilon^{m+1} g_m, \qquad (4.39')$$

где g_m — ограниченная функция.

Отметим, что при достаточной гладкости коэффициентов функцию $\varepsilon^{m+1} g_m$ можно дифференцировать. Однако, так как (см. (4.39)) в g_m входят функции типа погранслоя, при каждом дифференцировании $\varepsilon^{m+1}g_m$ порядок относительно ε в окрестности Γ^- уменьшается на 1. Вне любой фиксированной окрестности Γ^- производные от $\varepsilon^{m+1}g_m$ имеют тот же порядок ε^{m+1}.

4. Сформулируем теперь основные теоремы об асимптотике u_ε.

Теорема 6. *Если параметры задачи A_ε имеют гладкость $2(m+1)+p$-го порядка, то*

$$u_\varepsilon = w_0 + \sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j w_j + \sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r v_r + z_m, \quad z_m = \varepsilon^{m+1} g_m, \qquad (4.40)$$

где w_i получены с помощью первого итерационного процесса, v_i — функции типа погранслоя вблизи Γ^-, построенные с помощью второго итерационного процесса.

---

[1]) Q_η — полоска $\rho \leqslant \eta$.

Если ввести обозначения:

$$\|z\|_{\widetilde{Q}} = \left[\iint\limits_{\widetilde{Q}} z^2\, dx\, dy \right]^{\frac{1}{2}},$$

то для $\widetilde{Q} = Q - V(A) - V(B)$

$$\|z_m\|_{\widetilde{Q}} \leqslant C\varepsilon^{m+1}. \tag{4.41}$$

Кроме того, формулу (4.40) *можно почленно дифференцировать* $p+2$ *раз:*

$$D^i u_\varepsilon = \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^j D^i w_j + \sum_{r=0}^{m+1} \varepsilon^r D^i v_r + \varepsilon^{m+1} D^i g_m$$

(D^i — *любой оператор частной производной* i-*го порядка*), *причем*

$$\left.\begin{aligned} &\|D^1 z_m\|_{\widetilde{Q}} \leqslant C\varepsilon^{m+\frac{1}{2}}, \quad \|D^2 z_m\|_{\widetilde{Q}} \leqslant C\varepsilon^{m}, \\ &\|D^i z_m\|_{Q_1} \leqslant C\varepsilon^{m+1-\frac{i}{2}}, \quad \|D^i z_m\|_{U(\Gamma^-)} \leqslant C\varepsilon^{m+2-i+\frac{1}{2}}, \quad 3 \leqslant i \leqslant p+2, \end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

где Q_1 — *любая фиксированная подобласть, не содержащая окрестности* $U(\Gamma^-)$ *части* Γ^- *границы* Γ: $Q_1 = Q - U(\Gamma^-)$.

Теорема 7. *Если параметры задачи* A_ε *имеют гладкость третьего порядка, то*

$$u_\varepsilon = w_0 + v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon g_1, \tag{4.43}$$

где v_0 *строится как решение задачи* (4.32), (4.33′), v_1 — *как решение задачи* (4.35) ($i=1$) *при нулевом граничном условии:* $v_1|_{\rho=0} = 0$ [1]), *а остаточный член* $z = \varepsilon g_1$ *допускает во всей области* Q *оценку:*

$$|z| \leqslant C \min\left((y-y_0)^{\frac{1}{p}},\ \varepsilon(y-y_0)^{\frac{1}{p}-1},\ (y_1-y)^{\frac{1}{q}},\ \varepsilon(y_1-y)^{\frac{1}{q}-1}\right), \tag{4.44}$$

где $p-1$ *и* $q-1$ — *порядок касания границы* Γ *с характеристикой* $y=y_0$ *и* $y=y_1$ *в точках* $A(x_0, y_0)$ *и* $B(x_1, y_1)$ *соответственно.*

Таким образом, вне любых фиксированных окрестностей точек A и B, $|z| = O(\varepsilon)$.

Отметим еще, что *если* $h(x, y)$ *имеет нуль соответствующего порядка в точках* A *и* B, *то* w_0 *не имеет особенностей в* A *и* B, *и по всей области* Q $|z| = O(\varepsilon)$.

Теорема 8. *Если гладкость параметров задачи* A_ε *первого порядка и порядки касания характеристик в точках* A *и* B *меньше двух, то для* u_ε *имеет место асимптотика:*

$$u_\varepsilon = w_0 + v_0 + z,$$

где w_0 — *решение задачи* A_0, v_0 — *погранслой, построенный с помощью решения уравнения* (4.32) *при граничном условии* (4.33′), *а норма невязки* z, *взятая по всей области* Q, *оценивается следующим образом:*

$$\|z\|^2 \leqslant C\varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|^2 \leqslant C. \tag{4.45}$$

[1]) Очевидно, v_0 и v_1 следует еще умножить на $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$.

Так как $\left\|\frac{\partial v_0}{\partial \rho}\right\|^2 = O(\varepsilon^{-1})$, то второе из неравенств (4.45) указывает, что из невязки z уже удалена главная часть погранслоя.

Теорема 9. *Если $h \in \mathscr{L}_2(Q)$, а коэффициенты a, b, c имеют ограниченные первые производные, то u_ε слабо сходятся в $\mathscr{L}_2$ к w_0*[1]*, причем имеет место «слабая асимптотика»*:

$$(u_\varepsilon, \psi) - (w_0, \psi) = O(\sqrt{\varepsilon}) \tag{4.46}$$

для дифференцируемой функции ψ, обращающейся в нуль в окрестностях точек A и B. Нормы u_ε равномерно ограничены: $\|u_\varepsilon\| \leqslant C\|h\|$.

Доказательство этих теорем будет проведено в § 5.

Все эти теоремы распространяются на n-мерный случай, причем роль точек A и B играет $(n-2)$-мерное множество $\mathfrak{D}$ точек касания характеристик предельного уравнения 1-го порядка с границей Γ области Q, в которой исследуется задача.

5. Параболический пограничный слой. Если часть Γ_1 границы Γ совпадает с характеристикой для вырожденного оператора L_1, то при вырождении задачи A_ε в задачу A_0 вблизи Γ_1 разность $u_\varepsilon - w_0$ имеет характер пограничного слоя, однако сейчас для его описания недостаточно уже решения обыкновенных уравнений. Как мы покажем ниже, вблизи Γ_1 погранслой можно описать с помощью решения весьма простых *параболических уравнений*. Рассмотрим сначала простой пример уравнения

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} - u = h \tag{4.47}$$

в прямоугольнике Q $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ при граничных условиях (4.22) (задача A_ε). Вырожденное уравнение

$$L_1 w_0 \equiv \frac{\partial w_0}{\partial x} - w_0 = h \tag{4.48}$$

решается при условии

$$w_0|_{x=a} = 0 \qquad (\text{задача } A_0). \tag{4.48'}$$

Для построения погранслоя вблизи нижнего основания Γ_1 $(0 \leqslant x \leqslant a;\ y = 0)$ сделаем в уравнении $L_\varepsilon v = 0$ замену переменных $\frac{y}{\varepsilon} = t$, $y = t\varepsilon$:

$$L_\varepsilon v \equiv M_0 v + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad M_0 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial x} - v,$$

и будем решать это уравнение методом последовательных приближений. В первом приближении решим уравнение

$$M_0 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial x} - v = 0 \tag{4.49}$$

---

[1]) Слабая сходимость была независимо доказана так же И. Копачеком и О. А. Ладыженской. В недавно появившейся статье О. А. Ладыженской (Вестник ЛГУ, № 7, вып. 2 (1957), 104—120) установлена слабая сходимость решений u_ε для ряда других задач с малым параметром.

при условиях

$$v|_{x=a}=0, \quad v|_{t=0}=-w_0|_{y=0}=-w_0(x, 0), \tag{4.49'}$$

причем уравнение (4.49) решается в области $R(x<a, \ t>0)$. Решение задачи (4.49), (4.49′) записывается в явном виде: если положить $x_1=a-x$, $\varphi(\xi)=-e^{-(a-\xi)}w_0(a-\xi, \ 0)$, то

$$v(x_1, t)=v\left(x_1, \frac{y}{\varepsilon}\right)=\frac{e^{a-x_1}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}\frac{t}{(x_1-\xi)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{t^2}{4(x_1-\xi)}}\varphi(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{e^{a-x_1}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}\frac{y}{\varepsilon(x_1-\xi)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon^2(x_1-\xi)}}\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{4.50}$$

Очевидно, v имеет характер погранслоя вблизи $y=0$: для $y\geqslant\delta$ $v=O(\varepsilon^n)$, где n — любое число, производные по y от v ведут себя как производные погранслоя. Допустим, что функция h имеет непрерывную производную по x в Q и обращается в нуль в точках $A(a, 0)$ и $B(a, b)$[1]. Тогда $w_0(x, 0)=-e^x\varphi(a-x)$ дважды дифференцируема при $0\leqslant x\leqslant a$, причем $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}=\frac{e^{a-x_1}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}\frac{t}{(x_1-\xi)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{t^2}{4(x_1-\xi)}}[\varphi''(\xi)-2\varphi'(\xi)+\varphi(\xi)]\,d\xi. \tag{4.51}$$

Отсюда, в силу принципа максимума, выводим, что

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|\leqslant\max_{0\leqslant\xi\leqslant a}C\left(\left|\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}\right|+2\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|+|\varphi(\xi)|\right).$$

Положим $v_1(x, y)=v\left(x_1, \frac{y}{\varepsilon}\right)\psi\left(\frac{y}{\delta}\right)$ и $v_2(x, y)=\tilde{v}\left(x_1, \frac{b-y}{\varepsilon}\right)\psi\left(\frac{b-y}{\delta}\right)$, где $\tilde{v}\left(x_1, \frac{b-y}{\varepsilon}\right)$ — погранслой вблизи части границы Γ_1: $y=b$, $0\leqslant x_1\leqslant a$, который строится так же, как v. Остается построить погранслой вблизи левой стороны: $x=0$, $0\leqslant y\leqslant b$. Для этого можно использовать методику пункта 3, а именно:

$$L_\varepsilon v\equiv Mv+\varepsilon^2R_1v, \quad Mv\equiv\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}-v, \quad R_1v=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{4.52}$$

В первом приближении v определяем как функцию типа погранслоя из обыкновенного уравнения

$$Mv\equiv\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}-v=0 \tag{4.53}$$

при граничном условии:

$$v|_{x=0}=-w_0(0, y)-v_1(0, y)-v_2(0, y)=\zeta(y). \tag{4.54}$$

Очевидно, $v=\zeta(y)e^{-\frac{\lambda x}{\varepsilon^2}}$, $\lambda=\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon^2}}{2}$; $v_3=\psi\left(\frac{x}{\delta}\right)v$. Если h имеет ограниченные вторые производные в $\bar{Q}$ (хотя бы по y), то $w_0(0, y)$ — также дважды дифференцируема. Функции v_1 и v_2 допускают производные по y до

[1]) Если она не обращается в нуль в A и B, то в этих точках поведение невязки z, о которой речь идет ниже, оценивается с помощью барьеров, аналогично тому, как это сделано в § 5.

второго порядка, так как v и $\widetilde{v}$ удовлетворяют уравнению (4.49), а $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x}$ существуют в силу наших условий. Отсюда следует, что и v_3 — дважды дифференцируема по y. Оценим теперь невязку $z = u_\varepsilon - (w_0 + v_1 + v_2 + v_3)$. Очевидно, $z|_\Gamma = 0$. Далее, имеем:

$$L_\varepsilon z = L_\varepsilon u_\varepsilon - L_\varepsilon w_0 - L_\varepsilon (v_1 + v_2) - L_\varepsilon v_3 =$$

$$= -\varepsilon^2 \Delta w_0 - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 (v_1 + v_2)}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + O(\varepsilon^n), \quad (4.55)$$

причем в $O(\varepsilon^n)$ мы отнесли все члены, содержащие производные от множителей ψ, и, следовательно, равные нулю в $\frac{1}{3}\delta$-окрестности тех частей границы, где строились погранслои. Но вне этой окрестности функции v и их производные любого порядка малости по ε. Как уже отмечалось выше, $\frac{\partial^2 (v_1 + v_2)}{\partial x^2} = O(1)$ и, очевидно, $\frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} = O(1)$ всюду, кроме окрестностей V_0 и V_b точек $(0, 0)$ и $(0, b)$ шириной $O(\varepsilon)$ (так как в v_3 входит множителем $\zeta(y)$ (см. (4.54)). Таким образом, $L_\varepsilon z = O(\varepsilon^2)$ вне V_0 и V_b.

Для оценки z вводим вспомогательные функции $B_1(x, y) = M_1 e^{-\frac{x}{M\varepsilon^2}} + \varepsilon^2 (M_2 - M_3 x)$ и $B_2(x, y) = M_1 e^{-\frac{y}{M\varepsilon}} + \varepsilon^2 (M_2 - M_3 x)$. Так как при соответствующем подборе положительных постоянных M, M_1, M_2, M_3 $L_\varepsilon (B_i \pm z) < 0$ и $(B_i \pm z)|_\Gamma \geqslant 0$, то $B_i \geqslant |z|$ $(i = 1, 2)$. Следовательно, $|z| \leqslant \min(B_1, B_2)$. Вне окрестностей точек $(0, 0)$ и $(0, b)$ очевидно,

$$z = O(\varepsilon^2). \quad (4.56)$$

Применяя итерационные процессы, можно получить, так же как выше, асимптотику любого порядка, если параметры задачи достаточно гладкие.

В случае общего эллиптического уравнения (4.21) с коэффициентом ε^2 при старших производных, рассматриваемого в области Q, ограниченной снизу и сверху прямыми $y = 0$ и $y = b$, которые образуют с кусками Γ^- и Γ^+ углы, отличные от 0 и π, погранслой можно построить аналогично тому, как это сделано выше. Во-первых, произведем замену переменных: $x' = \varphi(x, y)$, $y' = y$, причем линии $x' = 0$ отвечают границе Γ^-, а $x' = a$ — границе Γ^+; $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \geqslant \gamma_0^2 > 0$. В плоскости (x', y') область Q изобразится прямоугольником Q' $(0 \leqslant x' \leqslant a,\ 0 \leqslant y' \leqslant b)$, уравнение (4.21) приобретет вид

$$L'_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \left[\alpha(x', y') \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + 2\beta(x', y') \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + \gamma(x', y') \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \delta(x', y') \frac{\partial u}{\partial y'} + \right.$$

$$\left. + \omega(x', y') \frac{\partial u}{\partial x'} + g(x', y') u \right] + \eta(x', y') \frac{\partial u}{\partial x'} - f(x', y') u =$$

$$= h(x', y'); \quad \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.57)$$

Для построения погранслоя v вблизи $y'=0$ представляем коэффициенты уравнения (4.57) по формуле Тейлора: $a(x', y') = a(x') + a_1(x')y' + \ldots$, $\eta(x', y') = \eta(x') + \eta_1(x')y' + \ldots$, $f(x', y') = f(x') + f_1(x')y' + \ldots$, делаем в (4.57) замену $\frac{y'}{\varepsilon} = t$ и приближенно решаем уравнение

$$L'_\varepsilon v \equiv M_0 v + \varepsilon R_1 v + \ldots = 0;$$

$$M_0 v \equiv \gamma(x')\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \eta(x')\frac{\partial v}{\partial x'} - f(x')v.$$

В первом приближении достаточно решить в области $x' < a$, $y' > 0$ уравнение

$$M_0 v \equiv \gamma(x')\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \eta(x')\frac{\partial v}{\partial x'} - f(x')v = 0 \tag{4.58}$$

при граничных условиях

$$v|_{t=0} = v|_{y'=0} = -w_0(x', 0), \quad v|_{x'=a} = 0. \tag{4.59}$$

Искомое решение в силу того, что коэффициенты уравнения (4.58) зависят лишь от x', играющего в (4.58) роль времени, выписывается в явном виде, аналогичном (4.50). Далее, строим функции v_1, v_2, v_3 так же, как выше, и получаем асимптотику вида (4.56), однако вместо $O(\varepsilon^2)$ мы сейчас получим в аналогичной формуле лишь $O(\varepsilon)$, так как в (4.57) имеются члены с первыми производными по y'.

Аналогичные явления параболического погранслоя возникают в n-мерном случае, когда граница Γ содержит кусок характеристического многообразия.

§ 5. Доказательство теорем 6—9

1. Оценка невязки z на основе энергетического неравенства. Семейство решений u_ε задачи A_ε (4.21), (4.22) равномерно ограничено (относительно ε) по норме в $\mathscr{L}_2$, точнее,

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2\right) + \|u\|^2 \leqslant C|(L_\varepsilon u, u)| \leqslant C_1\|h\|^2, \tag{5.1}$$

т. е. задача A_ε равномерно разрешима. Действительно, решения u_ε задачи A_ε имеют первые и вторые производные, принадлежащие $\mathscr{L}_2$ (см. [33], [34]) и, следовательно, для $u = u_\varepsilon$ имеем:

$$(h, u) = (L_\varepsilon u, u) = -\varepsilon \iint\limits_Q \left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial x} - d\right)\frac{\partial u}{\partial x}u + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial c}{\partial y} - e\right)\frac{\partial u}{\partial y}u + 2\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}u - gu^2\right]dx\,dy + \iint\limits_Q \frac{\partial u}{\partial x}u\,dx\,dy - \iint\limits_Q fu^2\,dx\,dy, \tag{5.2}$$

$$\iint\limits_Q \frac{\partial u}{\partial x}u\,dx\,dy = 0.$$

В силу эллиптичности оператора (4.19) в $\overline{Q}$ имеем:

$$a(x, y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \geqslant \omega^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right], \tag{5.3}$$

где $\omega^2 > 0$. Пользуясь оценкой скалярных произведений:

$$\left|\left(\left(\frac{\partial a}{\partial x}+2\frac{\partial b}{\partial y}-d\right)\frac{\partial u}{\partial x},\ u\right)+\left(\left(\frac{\partial c}{\partial y}-e\right)\frac{\partial u}{\partial y},\ u\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\omega^2\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2\right)+M\|u\|^2, \tag{5.3'}$$

мы из (5.2) и (5.3) выводим:

$$\varepsilon\cdot\frac{\omega^2}{2}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2\right)+(\alpha^2-2M\varepsilon)\|u\|^2 \leqslant |(h,\ u)| \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\|h\|^2+\frac{\alpha^2}{4}\|u\|^2$$

$$(|g| \leqslant M;\quad f \geqslant \alpha^2).$$

Взяв ε столь малым, чтобы $2M\varepsilon \leqslant \min\left(\frac{\alpha^2}{2},\ \frac{\omega^2}{2}\right)$, мы отсюда получим (5.1).

Допустим теперь, что выполнены условия, позволяющие провести итерационные процессы, описанные в п.3 § 4, т. е. пусть параметры задачи имеют гладкость порядка $2(m+1)$. Тогда в любой подобласти $\widetilde{Q} = Q - V(A) - V(B)$ для невязки

$$z = u_\varepsilon - \sum_{j=0}^{m}\varepsilon^j w_j - \sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r v_r = u_\varepsilon - \widetilde{w} - \widetilde{v} \tag{5.4'}$$

имеем (см. (4.39'))

$$L_\varepsilon z = \varepsilon^{m+1} g_m = O(\varepsilon^{m+1}). \tag{5.4}$$

Пусть $\zeta(y)$ — гладкая функция, причем $\zeta(y) \equiv 1$ при $y_0 + 2\delta \leqslant y \leqslant y_1 - 2\delta$ и $\zeta(y) \equiv 0$ для $y \geqslant y_1 - \delta$ и для $y \leqslant y_0 + \delta$. Имеем согласно (5.4), (4.19) и (4.20):

$$L_\varepsilon(\zeta z) = \zeta(y)\,O(\varepsilon^{m+1}) + \varepsilon\left(2b\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 2c\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} + c\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}z + e\frac{\partial\zeta}{\partial y}z\right) = h_1. \tag{5.5}$$

Так как в любой подобласти $\widetilde{Q}$ функции w_i $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m)$ дифференцируемы вплоть до границы $\widetilde{Q}$, то $\|\widetilde{w}\|_{W_2^{(1)}(\widetilde{Q})} = O(1)$. Далее, используя формулы для v_i, находим, что $\|\widetilde{v}\|^2_{W_2^{(1)}(\widetilde{Q})} \leqslant C\left(\left\|\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\rho}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\varphi}\right\|^2 + \|\widetilde{v}\|^2\right) = O(\varepsilon^{-1})$, а из оценки (5.1) следует $\|u_\varepsilon\|_{W_2^{(1)}} = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$. Отсюда для $z = u_\varepsilon - \widetilde{w} - \widetilde{v}$ получим:

$$\left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{\widetilde{Q}} + \left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{\widetilde{Q}} + \|z\|_{\widetilde{Q}} = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$$

и, значит,

$$\|h_1\| = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}). \tag{5.6}$$

Применяя теперь энергетическую оценку (5.1) к функции ζz, получим

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial(\zeta z)}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial(\zeta z)}{\partial y}\right\|^2\right) + \|\zeta z\|^2 \leqslant C\|h_1\|^2 = O(\varepsilon)$$

и, следовательно, по любой подобласти вида $\widetilde{Q} = Q - V(A) - V(B)$

$$\left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|^2_{\widetilde{Q}} + \left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|^2_{\widetilde{Q}} = O(1),\quad \|z\|^2_{\widetilde{Q}} = O(\varepsilon). \tag{5.7}$$

Но отсюда следует сразу, что правая часть h_1 уравнения (5.5) имеет норму

$O(\varepsilon)$ по области вида $\widetilde{Q}$ и, значит, применяя опять энергетическое неравенство (5.1), получим:

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial(\zeta z)}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial(\zeta z)}{\partial y}\right\|^2\right)+\|\zeta z\|^2=O(\varepsilon^2),$$

и отсюда

$$\left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|^2_{\widetilde{Q}}+\left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|^2_{\widetilde{Q}}=O(\varepsilon),\quad \|z\|^2_{\widetilde{Q}}=O(\varepsilon^2).$$

Применяя последовательно такое же рассуждение, получим:

$$\left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|^2_{\widetilde{Q}}+\left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|^2_{\widetilde{Q}}=O(\varepsilon^{2m+1}),\quad \|z\|^2_{\widetilde{Q}}=O(\varepsilon^{2m+2}). \tag{5.8}$$

Таким образом, вне окрестностей точек A и B (в которых, как было указано выше, $\frac{\partial z}{\partial y}$, как правило, имеет особенности) в случае достаточной гладкости параметров задачи для невязки

$$z=u_\varepsilon-\sum_{j=0}^{m}\varepsilon^j w_j-\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r v_r$$

имеют место оценки (5.8), характеризующие в метрике $\mathscr{L}_2$ малость z и ее первых производных, и, следовательно, часть теоремы 6 доказана (см. (4.41) и первую из оценок (4.42)).

Замечание. Можно показать, что оценки (5.8) верны также, если h имеет производные до порядка $2m+1$ и при несколько меньших условиях на гладкость коэффициентов, но мы на этом останавливаться не будем.

2. Оценки производных высших порядков от невязки z. Оценка невязки z во внутренней подобласти. В любой внутренней подобласти Q_1, $\overline{Q}_1\subset Q$, при достаточно малых ε, $z=u_\varepsilon-\sum_{j=0}^{m}\varepsilon^j w_j$, так как $\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r v_r\equiv 0$ для $P\in Q_1$. Согласно (4.18) и (4.34)

$$L_\varepsilon z=L_\varepsilon\left(u_\varepsilon-\sum_{j=0}^{m}\varepsilon^j w_j\right)=-\varepsilon^{m+1}L_2 w_m. \tag{5.9}$$

Допустим, что $h\in W_2^{(s)}$, где $s=2(m+1)+p$. Тогда в Q_1 $L_2 w_m\in W_2^{(p)}$, $u_\varepsilon\in W_2^{(s+2)}$ (см. [44], [34]), $\sum_{j=0}^{m}\varepsilon^j w_j\in W_2^{(p+2)}$. Эти дифференциальные свойства позволяют нам ниже почленно дифференцировать получающиеся уравнения. Пусть $\widetilde{\zeta}(P)$ — гладкая функция, обращающаяся в 1 в Q_1 и равная нулю вблизи Γ. Тогда, пользуясь (5.9), найдем:

$$L_\varepsilon(\widetilde{\zeta}z)=-\widetilde{\zeta}\varepsilon^{m+1}L_2 w_m+\varepsilon\left(2a\frac{\partial\widetilde{\zeta}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\ldots\right)+z\frac{\partial\widetilde{\zeta}}{\partial x}. \tag{5.10}$$

Продифференцируем обе части (5.10) по x и обозначим $\widetilde{\zeta}z=\widetilde{z}$:

$$L_\varepsilon\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\widetilde{\zeta}\varepsilon^{m+1}L_2 w_m\right]+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[2a\frac{\partial\widetilde{\zeta}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\right]+\ldots\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[z\frac{\partial\widetilde{\zeta}}{\partial x}\right]-\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial x}\widetilde{z}, \tag{5.11}$$

где

$$\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial x}=\varepsilon\left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\ldots\right)-\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Умножим обе части (5.11) скалярно на $\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial x}$ и, пользуясь оценкой (5.1) и интегрированием по частям, получим:

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial x}\right)\right\|^2+\left\|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial x}\right)\right\|^2\right)+\left\|\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial x}\right\|^2\leqslant C\left(L_\varepsilon\left(\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial x}\right),\ \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial x}\right)=$$
$$=C\left\{\left(\widetilde{\zeta}\varepsilon^{m+1}L_2w_m,\ \frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial x^2}\right)-\varepsilon\left[\left(2a\frac{\partial\widetilde{\zeta}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial x^2}\right)+\ldots\right]+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial\widetilde{\zeta}}{\partial x}\right),\ \frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial x}\widetilde{z},\ \frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right)\right\}. \quad (5.12)$$

С помощью интегрирования по частям придадим последнему слагаемому следующий вид:

$$-\left(\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial x}\widetilde{z},\ \frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right)=\varepsilon\left[2\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x},\ \frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right)+\ldots\right]+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\widetilde{z},\ \frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right).$$

Применяя теперь к каждому из слагаемых правой части (5.12) элементарное неравенство $(F,\ G)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta}\|F\|^2+\delta\|G\|^2\right)$, получим:

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right)\right\|^2+\left\|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right)\right\|^2\right)+\left\|\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right\|^2\leqslant C\left\{\frac{1}{2}\delta^{-1}\varepsilon^{2m+1}\|\widetilde{\zeta}L_2w_m\|^2+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\delta\varepsilon\left\|\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial x^2}\right\|^2+\varepsilon\left[\frac{1}{2}\delta^{-1}4M^2\left\|\frac{\partial\widetilde{\zeta}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\right\|^2+\frac{1}{2}\delta\left\|\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial x^2}\right\|^2+\ldots\right]+\delta^{-1}\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial\widetilde{\zeta}}{\partial x}\right)\right\|^2+$$
$$\left.+\frac{1}{2}\delta\left\|\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right\|^2+\varepsilon\left[M^2\left\|\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right\|^2+\ldots\right]\right\}+\frac{1}{2}\delta^{-1}M^2\|\widetilde{z}\|^2+\frac{1}{2}\delta\left\|\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right\|^2,$$

где

$$M=\max\left(|a|,\ \left|\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|,\ \ldots,\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right).$$

Взяв δ достаточно малым, перенеся члены с множителем δ влево и пользуясь доказанной оценкой (5.8) ($\widetilde{\zeta}=0$ вне $\widetilde{Q}$), получим:

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right)\right\|^2+\left\|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right)\right\|^2\right)+\left\|\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}\right\|^2=O(\varepsilon^{2m+1}),$$

или, так как $\widetilde{\zeta}\equiv 1$ в Q_1,

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\|_{Q_1}^2+\left\|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\|_{Q_1}^2\right)+\left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{Q_1}^2=O(\varepsilon^{2m+1}). \quad (5.13)$$

Совершенно аналогичную оценку мы получим, если продифференцируем (5.10) по y. Дифференцируя последовательно (5.10) по x и по y и используя оценки вида (5.13), мы получим следующую оценку:

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(D^jz\right)\right\|_{Q_1}^2+\left\|\frac{\partial}{\partial y}\left(D^jz\right)\right\|_{Q_1}^2\right)+\|D^jz\|_{Q_1}^2=O(\varepsilon^{2m+2-j})\leqslant M\varepsilon^{2m+2-j}, \quad (5.14)$$

где D^j — оператор любой частной производной порядка j, $j\leqslant p+1$.

Замечание. Заметим, что для получения оценки (5.14) при $j=p+1$ мы, вообще говоря, не сумеем $(p+1)$-й раз продифференцировать (5.10), так как L_2w_m имеет лишь производные до порядка p. Это затруднение можно обойти, предположив вначале, что $h = h_n \in W_2^{(s+1)}$, $s = 2(m+1)+r$, $z = z_n$ — соответствующая h_n невязка, причем $h_n \Rightarrow h$ в метрике $W_2^{(s)}$.

Далее легко видеть, что константа M в (5.14) зависит лишь от норм $\| h_n \|_{W_2^{(s)}}$ и, следовательно, возможно в оценке (5.14), записанной для z_n и h_n, перейти к пределу при $n \to \infty$, не изменяя M.

3. Оценка невязки z в граничной полоске области. Оценим теперь высшие производные от невязки в пограничной полоске, не примыкающей к точкам A и B. Пусть полоска Q^1 ограничена кривыми: $\Gamma^-(\rho = 0)$, $\rho = \eta$, $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \Phi$, где $\varphi = 0$ — координата точки A на Γ, а Φ — координата точки B. Будем считать, что в областях вида Q^1 линии $\varphi = \mathrm{const}$ совпадают с кусками характеристик $y = \mathrm{const}$; через Q^2 будем обозначать аналогичную область вблизи Γ^+.

Во-первых, докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка[1])

$$\varepsilon \left(\left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right\|_{Q^i} + \left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} \right\|_{Q^i} + \left\| \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right\|_{Q^i}^2 \right) + \left\| \frac{\partial z}{\partial x} \right\|_{Q^i} + \| z \|_{Q^i} = O(\varepsilon^{m+1}). \tag{5.15}$$

Оператор L_ε запишем в Q^1 в координатах (ρ, φ):

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \left(\alpha(\rho, \varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + 2\beta(\rho, \varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \, \partial \varphi} + \gamma(\rho, \varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \ldots \right) + \delta(\rho, \varphi) \frac{\partial u}{\partial \rho} - fu,$$

причем отметим, что так как линии $\varphi = \mathrm{const}$ совпадают с $y = \mathrm{const}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, и, следовательно, коэффициент $\varkappa$ при $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$ в (4.28) равен нулю. Пусть $\zeta = \zeta(\rho, \varphi)$ — гладкая функция, равная 1 в некоторой малой окрестности точки $(0, \varphi_0)$, лежащей внутри Γ^-, и равная нулю вне несколько большей окрестности. Например, $\zeta = \psi\left(\frac{\rho}{3\delta}\right) \psi\left(\frac{|\varphi - \varphi_0|}{3\delta}\right)$. Для $z = u_\varepsilon - \widetilde{w} - \widetilde{v}$ согласно (5.4), (5.4′) и (4.38), (4.39) имеем:

$$L_\varepsilon z = \varepsilon^{m+1} g_m(\rho, \varphi, \varepsilon), \tag{5.16}$$

где

$$g_m = -L_2 w_m - (R_{m+2} v_0 + R_{m+1} v_1 + \ldots + R_1 v_{m+1}) + O(\varepsilon).$$

Функция g_m выражается через функцию w_m, не зависящую от ε, и с помощью функций $v_0, v_1, \ldots, v_{m+1}$, имеющих характер погранслоя, и, следовательно, сосредоточенных лишь в областях вида Q^1 и равных нулю в областях вида Q^2.

Функция ζz удовлетворяет уравнению

$$L_\varepsilon(\zeta z) = \zeta \varepsilon^{m+1} g_m + \varepsilon \left(2\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \ldots \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \delta z = h_1. \tag{5.17}$$

---

[1]) Такого типа оценки для уравнений второго порядка, не содержащих параметры, были выведены С. Н. Бернштейном [31], [32] для случая двух независимых переменных и О. А. Ладыженской [33], [34] для n переменных, для уравнений высших порядков — О. В. Гусевой [44] (см. также Ниренберг [45]), [48]). Такие же оценки с заменой норм в $\mathscr{L}_2$ нормами в $\mathscr{L}_p$ были установлены А. И. Кошелевым [46], [47] (см. также Ниренберг [48]).

Приводимые ниже выводы оценок (5.15) и (5.32), а также аналогичных оценок для решений уравнений высших порядков (см. теорему 11), отчасти близки к соответствующим рассуждениям О. В. Гусевой [44].

Введем обозначения $\widetilde{z}=\zeta z$, L_ε^0 — оператор, полученный из L_ε заменой его коэффициентов их значениями в точке (ρ_0, φ_0), $\rho_0<\delta$, т. е. для $\rho<\eta$

$$L_\varepsilon^0(\widetilde{z})\equiv\varepsilon\left(\alpha_0\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\ldots\right)+\delta_0\frac{\partial z}{\partial\rho}-f_0 z,$$

где $\alpha_0=\alpha(\rho_0, \varphi_0)$, $\ldots$, $\delta_0=\delta(\rho_0, \varphi_0)$, $\ldots$, и запишем (5.17) в виде

$$L_\varepsilon^0\widetilde{z}=h_1+(L_\varepsilon^0-L_\varepsilon)\widetilde{z}=h_2. \tag{5.18}$$

Мы оценим сейчас $\widetilde{z}$ через h_2. Для этого будем считать функции $\widetilde{z}$ и h_2 продолженными нулем в полосах: $\varphi_0+3\delta\leqslant\varphi<+\infty$, $-\infty<\varphi\leqslant\varphi_0-3\delta$, $3\delta\leqslant\rho<+\infty$, и применим преобразование Фурье по φ к обеим частям (5.18):

$$\widetilde{L}_\varepsilon^0 Z\equiv\varepsilon\left(\alpha_0\frac{\partial^2 Z}{\partial\rho^2}+2\beta_0(i\lambda)\frac{\partial Z}{\partial\rho}-\gamma_0\lambda^2 Z+\ldots\right)+\delta_0\frac{\partial Z}{\partial\rho}-f_0 Z=H_2, \tag{5.19}$$

где

$$Z(\rho, \lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\varphi}\widetilde{z}(\rho, \varphi)\,d\varphi, \quad H_2(\rho, \lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\varphi}h_2(\rho, \varphi)\,d\varphi. \tag{5.20}$$

Уравнение (5.19) является *обыкновенным дифференциальным уравнением по* ρ с постоянными коэффициентами, содержащими параметр λ, причем в силу того, что

$$\widetilde{z}|_{\rho=0}=0 \text{ и } \widetilde{z}\equiv 0 \text{ для } \rho\geqslant 3\delta,$$

имеем

$$Z|_{\rho=0}=0 \text{ и } Z\equiv 0 \text{ для } \rho\geqslant 3\delta. \tag{5.21}$$

Представив в явном виде с помощью соответствующей функции Грина $G(\rho, \xi, \lambda)$[1] Z через H_2: $Z=\int G(\rho, \xi; \lambda)\,H_2(\xi)\,d\xi$, можно вывести для малых ε оценку

$$\varepsilon^2\left(\left\|\frac{\partial^2 Z}{\partial\rho^2}\right\|_\rho^2+\lambda^2\left\|\frac{\partial Z}{\partial\rho}\right\|_\rho^2+\lambda^4\|Z\|_\rho^2\right)+\left\|\frac{\partial Z}{\partial\rho}\right\|_\rho^2+\|Z\|_\rho^2\leqslant C\|H_2\|_\rho^2, \tag{5.22}$$

где $\|\ \|_\rho$ означает норму, взятую только по ρ в $\mathscr{L}_2(0, 3\delta)$, а C — константа, которую можно так выбрать, чтобы она не зависела от λ, ε и от выбора точки (ρ_0, φ_0), если $0<\delta_0<\varphi_0<\Phi-\delta_0$, где δ_0 — фиксировано. Интегрируя по λ обе части (5.22) и применяя равенство Парсеваля, получим:

$$\|\widetilde{z}\|_\varepsilon^2\equiv\varepsilon^2\left(\left\|\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial\rho^2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial\rho\,\partial\varphi}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial\varphi^2}\right\|^2\right)+\left\|\frac{\partial\widetilde{z}}{\partial\rho}\right\|^2+\|\widetilde{z}\|^2\leqslant$$
$$\leqslant C\|h_2\|^2\leqslant 2C(\|h_1\|^2+\|(L_\varepsilon^0-L_\varepsilon)\widetilde{z}\|^2). \tag{5.21'}$$

Так как

$$(L_\varepsilon^0-L)\widetilde{z}=\varepsilon\left[(\alpha(\rho_0, \varphi_0)-\alpha(\rho, \varphi))\frac{\partial^2\widetilde{z}}{\partial\rho^2}+\ldots\right]+\ldots-[f(\rho_0, \varphi_0)-f(\rho, \varphi)]\widetilde{z}$$

и $\widetilde{z}=\zeta z$ обращается в нуль для $\rho\geqslant 3\delta$, $|\varphi-\varphi_0|\geqslant 3\delta$, то

$$\|(L_\varepsilon^0-L_\varepsilon)\widetilde{z}\|^2\leqslant C_1\omega^2(3\delta)\|\widetilde{z}\|_\varepsilon^2, \tag{5.22'}$$

[1] Выбор второго граничного условия для построения функции Грина G не существен, так как $Z\equiv 0$ при $\rho\geqslant 3\delta$.

где $\omega(\delta)$ — максимальная осцилляция в Q_η коэффициентов операторов L_2 и L_1 ($L_\varepsilon = \varepsilon L_2 + L_1$), когда аргументы (ρ, φ) отклоняются на величину δ. Очевидно, $\omega \to 0$ при $\delta \to 0$. Взяв δ столь малым, чтобы $2CC_1\omega^2 \leqslant \frac{1}{2}$, мы получим из (5.21′) и (5.22′)

$$\|\tilde{z}\|_\varepsilon^2 \leqslant 4C\,\|h_1\|^2 = O(\varepsilon^{2m+2}), \tag{5.23}$$

причем последнее равенство мы написали на основании (5.17) и ранее установленных оценок (5.8) для норм $D^1 z$ и z, взятых по подобластям вида $\tilde{Q} = Q - V(A) - V(B)$.

Теперь уже легко вывести оценки (5.15) во всей области Q^1 («ширина» Q^1 равна δ, $0 \leqslant \rho \leqslant \delta$). Пусть $\tilde{\zeta}(\rho, \varphi)$ — гладкая функция, равная единице на Q^1 и нулю вне несколько большей области и представимая в виде $\tilde{\zeta} \equiv \zeta_1 + \ldots + \zeta_r$, где ζ_i — такие же функции, как ζ, т. е. гладкие функции, со столь малыми носителями, при которых справедлива оценка (5.23). Тогда получим для $\bar{z} = \tilde{\zeta} z = \sum_{i=1}^{r} \zeta_i z = \sum_{i=1}^{r} \tilde{z}_i$, пользуясь (5.17):

$$\|\bar{z}\|_\varepsilon^2 \leqslant C_2 \sum_{i=1}^{r} \|\tilde{z}_i\|_\varepsilon^2 \leqslant C_3 \sum_{i=1}^{r} \|h_i\|^2 = O(\varepsilon^{2m+2}), \tag{5.24}$$

где h_i совпадает с правой частью (5.17), в которой $\zeta = \zeta_i$.

Так как $\tilde{\zeta} \equiv 1$ в Q^1, то из (5.24) выводим, что

$$\|z\|_{\varepsilon, Q^1}^2 = O(\varepsilon^{2m+2}), \tag{5.25}$$

где $\|z\|_{\varepsilon, Q^1}^2$ определяется с помощью левой части (5.21′), в которой нормы берутся по Q^1. Возвращаясь от координат (ρ, φ) к координатам (x, y) и используя для оценки норм первых производных ранее выведенные оценки (5.8), мы получим (5.15).

Очевидно, что для областей типа Q^2 это доказательство остается в силе. а также в $\tilde{Q}$.

Так как по любой внутренней подобласти оценка (5.15), как было показано в п. 2, имеет место, то она справедлива также в любой подобласти типа $\tilde{Q}$.

Перейдем теперь к оценке производных высшего порядка от z. Для этого допустим, что выполнены такие условия гладкости параметров задачи, которые позволяют обе части (5.17) дифференцировать по ρ и φ p раз, т. е. параметры задачи имеют гладкость $2(m+1)+p$. Заменим в (5.17) ζ на $\tilde{\zeta}$, положим $\tilde{\zeta} z = \bar{z}$ и продифференцируем обе части (5.17) по φ:

$$L_\varepsilon\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi}\right) = \varepsilon^{m+1} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\tilde{\zeta} g_m) + \varepsilon\left(2\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\alpha \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho}\right] + \ldots\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \rho}\,\partial z\right) - \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varphi} z = O(\varepsilon^{m+\frac{1}{2}}), \tag{5.26}$$

причем последнее равенство мы написали на том основании, что $\frac{\partial}{\partial \varphi}(\tilde{\zeta} g_m) = O(1)$, так как дифференцирование по φ не повышает порядка погранслоев, входящих в g_m, а остальные члены имеют порядок $O(\varepsilon^{m+\frac{1}{2}})$

на основании оценок (5.25) и (5.8). Применяя к (5.26) оценку (5.25), мы получим:

$$\left\| \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} \right\|_{\varepsilon}^{2} = O\left(\varepsilon^{2m+1}\right). \tag{5.27}$$

Аналогично получим, что

$$\left\| \frac{\partial^{i} \bar{z}}{\partial \varphi^{i}} \right\|_{\varepsilon}^{2} = O\left(\varepsilon^{2m+2-i}\right) \quad (0 \leqslant i \leqslant p). \tag{5.28}$$

Для получения оценок других производных продифференцируем (5.17) (после замены ζ на $\widetilde{\zeta}$) по ρ. Тогда из полученного уравнения найдем:

$$\varepsilon^{2} \left\| \frac{\partial^{3} \bar{z}}{\partial \rho^{3}} \right\|^{2} \leqslant C \left(\left\| \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} \right\|_{\varepsilon}^{2} + \| \bar{z} \|_{\varepsilon}^{2} + \varepsilon^{2(m+1)} \left\| \frac{\partial (\widetilde{\zeta} g_m)}{\partial \rho} \right\|^{2} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{2} \left\| 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(a \frac{\partial \widetilde{\zeta}}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) + \ldots \right\|^{2} \right). \tag{5.29}$$

Теперь уже следует различать случаи области Q^1 и Q^2, так как в них по-разному ведет себя $\frac{\partial}{\partial \rho}(\widetilde{\zeta} g_m)$. Действительно, в g_m входят функции типа погранслоя, сосредоточенные вблизи Γ^-, и, следовательно,

$$\left\| \frac{\partial^{k}}{\partial \rho^{k}} (\widetilde{\zeta} g_m) \right\|_{\widetilde{Q}^1} = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{k-\frac{1}{2}}} \right)^{1)}, \quad \left\| \frac{\partial^{k}}{\partial \rho^{k}} (\widetilde{\zeta} g_m) \right\|_{\widetilde{Q}^2} = O(1), \tag{5.30}$$

где $\widetilde{Q}^1$ и $\widetilde{Q}^2$ — области типа Q^1 и Q^2. Пользуясь оценками (5.27), (5.24), (5.29), (5.30) и для оценки последнего слагаемого в (5.29) применяя оценки (5.25) в несколько большей области $\hat{Q}_1$, $\hat{Q}_1 \supset \widetilde{Q}_1$, получим:

$$\varepsilon^{2} \left\| \frac{\partial^{3} \bar{z}}{\partial \rho^{3}} \right\|_{\widetilde{Q}^1}^{2} \leqslant O\left(\varepsilon^{2m+1}\right), \tag{5.31}$$

$$\varepsilon^{2} \left\| \frac{\partial^{3} \bar{z}}{\partial \rho^{3}} \right\|_{\widetilde{Q}^2}^{2} \leqslant O\left(\varepsilon^{2m+1}\right). \tag{5.31'}$$

Дифференцируя по ρ и по φ последовательно уравнение (5.17), мы выведем аналогично

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{2} \| D_{\rho}^{k+2} D_{\varphi}^{l} (\bar{z}) \|_{\widetilde{Q}^1}^{2} &= O\left(\varepsilon^{2(m+1)+1-2k-l}\right), \\ \varepsilon^{2} \| D_{\rho}^{k+2} D_{\varphi}^{l} (\bar{z}) \|_{\widetilde{Q}^2}^{2} &= O\left(\varepsilon^{2(m+1)-k-l}\right) \end{aligned} \right\} (k \geqslant 1), \tag{5.32}$$

где $D_{\rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}$, $D_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $k + l \leqslant p$. Вспоминая, что $\widetilde{\zeta} = 1$ в Q^1, соответственно Q^2, и объединяя оценки (5.32), (5.28), (5.25), а также оценки (5.14), полученные в любой внутренней подобласти, мы убедимся в справедливости всех утверждений теоремы 6.

---

1) Действительно, g_m является суммой ограниченных коэффициентов, умноженных на множители вида $P\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) \exp\left[-\lambda(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}\right]$ (см. (4.37), (4.39)), а $\left\| \widetilde{\zeta} P\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) \exp\left[-\lambda_1(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}\right] \right\| = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$.

При дифференцировании g_m по ρ каждый раз возникает множитель $\frac{1}{\varepsilon}$, который и приводит к увеличению нормы g_m на порядок.

4. Доказательство теоремы 8. Если правая часть h и коэффициенты L_ε имеют ограниченные первые производные в Q и порядок касания $p-1$ и $q-1$ характеристик в точках A и B меньше 2, то согласно (4.27) решение w задачи A_0 принадлежит $W_2^{(1)}(Q)$. Кроме того, первое приближение погранслоя $v_0 = -\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right) w(0, \varphi) \exp\left(-\lambda, \frac{\rho}{\varepsilon}\right)$ также принадлежит $W_2^{(1)}$. Отсюда следует, что невязка $z = u_\varepsilon - (w + v_0) \in W_2^{(1)}$ и $z|_\Gamma = 0$.

Для гладких функций $G(x, y)$, $H(x, y)$, обращающихся в нуль на Γ, имеем (см. (5.2)):

$$(L_\varepsilon G, H) = -\varepsilon \iint\limits_Q \left[a \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + b\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} + b\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} + c\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} + \ldots\right] dx\,dy +$$
$$+ \iint\limits_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - fG\right) H\,dx\,dy = -\varepsilon B(G, H) + (L_1 G, H), \qquad (5.33)$$

где через B мы обозначили интеграл с множителем ε. Совершенно аналогично тому, как это сделано при выводе энергетического неравенства ((5.3), (5.3')), получим:

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|^2\right) + \|z\|^2 \leqslant C\,|-\varepsilon B(z, z) + (L_1 z, z)|. \qquad (5.34)$$

С другой стороны, пользуясь тем, что u_ε — решение задачи A_ε (4.21), (4.22), а w — задачи A_0 $(z = u_\varepsilon - (w + v_0))$, имеем:

$$-\varepsilon B(z, z) + (L_1 z, z) = -\varepsilon B(u_\varepsilon, z) + (L_1 u_\varepsilon, z) - [-\varepsilon B(w, z) + (L_1 w, z)] -$$
$$-[-\varepsilon B(v_0, z) + (L_1 v_0, z)] = (h, z) + \varepsilon B(w, z) - (h, z) +$$
$$+ \varepsilon B(v_0, z) - (L_1 v_0, z). \qquad (5.35)$$

Очевидно,

$$\varepsilon B(w, z) \leqslant KM\varepsilon\,\|w\|^2_{W_2^{(1)}} + \varepsilon\frac{M}{K}\left(\left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|^2 + \|z\|^2\right). \qquad (5.36)$$

Последние два слагаемых в (5.35) представляются в виде интегралов, взятых по окрестности Γ^-, в которой $v_0 \neq 0$. Записывая эти интегралы в координатах (ρ, φ), имеем:

$$-\varepsilon B(v_0, z) + (L_1 v_0, z) =$$
$$= \left|\iint\limits_Q \left\{\varepsilon\left[\rho C \frac{\partial v_0}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho} + D\frac{\partial v_0}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \ldots\right] + F\rho\frac{\partial v_0}{\partial \rho} z + G\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} z + H v_0 z\right\} d\rho\,d\varphi\right| +$$
$$+ O(\varepsilon^n)\,^{1)}, \qquad (5.37)$$

причем мы представили коэффициенты $\alpha(\rho, \varphi) = a(x, y)$ и $\delta(\rho, \varphi)$ (см. (4.28), (4.29)) в виде $\alpha(\rho, \varphi) = \alpha(\varphi) + \rho\alpha_1(\rho, \varphi)$, $\delta(\rho, \varphi) = \delta(\varphi) + \rho\delta_1(\rho, \varphi)$. Под знаком последнего интеграла не будет членов $+\alpha(\varphi)\frac{\partial v_0}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \delta(\varphi)\frac{\partial v_0}{\partial \rho} z$, так как v_0 удовлетворяет уравнению (4.32); через $O(\varepsilon^n)$ мы обозначили члены, содержащие производные от $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$. Это оправдано

---

[1]) v_0 под знаком интеграла означает функцию, заданную формулой (4.33''), т. е. без множителя $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$, который включен в коэффициенты и в $O(\varepsilon^n)$.

тем, что подынтегральное выражение с такими членами равно нулю в $\frac{1}{3}$ η-полоске Γ^-, а вне этой полоски погранслой v_0 и его производные имеют любой порядок малости относительно ε. Кроме того, с помощью интегрирования по частям мы добиваемся того, чтобы в правой части (5.37) под знаком интеграла не было членов с $\frac{\partial v_0}{\partial \rho}$, кроме случая $C\rho \frac{\partial v_0}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho}$.

С помощью не раз уже применявшихся оценок скалярных произведений мы из (5.37) выводим, что

$$| -\varepsilon B(v_0, z) + (L_1 v_0, z) | \leqslant \frac{M\varepsilon^2}{K} \left(\left\| \frac{\partial z}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial z}{\partial y} \right\|^2 \right) + \frac{M}{K} \| z \|^2 + \\ + K_1 \left(\| v_0 \|^2 + \left\| \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right\|^2 + \left\| \rho \frac{\partial v_0}{\partial \rho} \right\|^2 \right). \quad (5.38)$$

Так как

$$\left. \begin{gathered} \| v_0 \|^2 = \iint\limits_{\rho \leqslant \eta} w^2(0, \varphi)\, e^{-2\lambda_1(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}} \cdot I\, d\rho\, d\varphi = O(\varepsilon), \quad \left\| \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right\|^2 = O(\varepsilon), \\ \left\| \rho \frac{\partial v_0}{\partial \rho} \right\|^2 = O(\varepsilon), \end{gathered} \right\} \quad (5.39)$$

то, взяв в (5.38) и (5.36) K таким, чтобы $\frac{MC}{K} \leqslant \frac{1}{2}$, мы из (5.34), (5.35), (5.36) и (5.38) при достаточно малом ε выведем, что

$$\varepsilon \left(\left\| \frac{\partial z}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial z}{\partial y} \right\|^2 \right) + \| z \|^2 = O(\varepsilon),$$

что и требовалось доказать.

5. Доказательство теоремы 9. Если $h(x, y) \subset \mathscr{L}_2(Q)$, то $w(x, y)$, вообще говоря, не допускает производной по y и обладает такими же разрывами, грубо говоря, как функция h.

По фиксированной функции $\psi(x, y)$, дифференцируемой в $\overline{Q}$ и обращающейся в нуль в некоторых окрестностях точек A и B, строим функцию $\zeta(x, y)$ как решение задачи Коши:

$$L_1^* \zeta \equiv -\frac{\partial \zeta}{\partial x} - f(x, y)\zeta = \psi(x, y), \quad (x, y) \in Q, \quad \zeta|_{\Gamma^-} = 0 \quad (5.40)$$

(L_1^* — оператор, сопряженный к L_1 (4.20)). Очевидно, $\zeta(x, y)$ обращается, как и $\psi(x, y)$, в нуль вблизи A и B. Докажем, что

$$(u_\varepsilon, \psi) = (h, \zeta) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (5.41)$$

С другой стороны,

$$(w, \psi) = (w, L_1^* \zeta) = (L_1 w, \zeta) = (h, \zeta). \quad (5.42)$$

Из (5.41) и (5.42) вытекает (4.46). Остается вывести (5.41). По функции $\zeta(x, y)$, которая на Γ^+ не обращается, вообще говоря, в нуль, строим вблизи Γ^+ пограничный слой $\tilde{\nu}(\rho, \theta)$ как решение обыкновенного уравнения

$$N\nu \equiv \varepsilon\alpha(\theta) \frac{\partial^2 \tilde{\nu}}{\partial \rho^2} + \delta_0(\theta) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \rho} = 0, \quad (5.43)$$

где (ρ, θ) — такие же координаты вблизи Γ^+, как (ρ, φ) вблизи Γ^-; $\alpha(\theta) = \alpha(\rho, \theta)|_{\rho=0}$, $\delta_0(\theta) = -\cos(\rho, x)|_{\Gamma^+} \geqslant \alpha_1^2 > 0$, при граничном условии

$$\tilde{\nu}|_{\Gamma^+} = \tilde{\nu}|_{\rho=0} = -\zeta(\rho, \theta)|_{\rho=0} = -\zeta(0, \theta). \tag{5.44}$$

Следовательно, $\tilde{\nu} = -\zeta(0, \theta) e^{-\frac{d_1\rho}{\varepsilon}}$, $d_1 = \frac{\delta_0(\theta)}{\alpha(\theta)} \geqslant \alpha_2^2 > 0$. Положим: $\nu = \tilde{\nu} \cdot \psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$. Очевидно, $(\zeta + \nu)|_\Gamma = 0$.

Отметим, что оператор N является такой же частью оператора L_ε^*, как оператор M_0 относительно оператора L_ε.

Имеем согласно (5.40):

$$\begin{aligned}(u_\varepsilon, \psi) &= (u_\varepsilon, L_1^*\zeta) = (u_\varepsilon, L_1^*(\zeta + \nu)) - (u_\varepsilon, L_1^*\nu) = \\ &= (L_\varepsilon u_\varepsilon, \zeta + \nu) + ((L_1 - L_\varepsilon) u_\varepsilon, (\zeta + \nu)) - (u_\varepsilon, L_1^*\nu) = \\ &= (h, \zeta) + (h, \nu) - \varepsilon(L_2 u_\varepsilon, (\zeta + \nu)) - (u_\varepsilon, L_1^*\nu). \end{aligned} \tag{5.45}$$

Пользуясь тем, что $(\zeta + \nu)|_\Gamma = 0$, мы сможем с помощью интегрирования по частям придать третьему слагаемому вид билинейной формы: $-\varepsilon(L_2 u_\varepsilon, (\zeta + \nu)) = \varepsilon B(u_\varepsilon, \zeta + \nu)$, в которую входят лишь производные 1-го порядка от u_ε, $(\zeta + \nu)$ и сами функции u_ε, $z + \nu$ (см. (5.33)). Но в силу (5.1) и ограниченности производных от ζ в. Q

$$\varepsilon|B(u_\varepsilon, \zeta)| \leqslant C\varepsilon \|u_\varepsilon\|_{W_2^{(1)}} \|\zeta\|_{W_{(2)}^{(1)}} = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{5.46}$$

Слагаемые $\varepsilon B(u_\varepsilon, \nu) - (u_\varepsilon, L_1^*\nu)$ оцениваются аналогично тому, как $\varepsilon B(v_0, z) - (L_1 v_0, z)$ в доказательстве предыдущей теоремы (см. (5.37), (5.38))

$$\begin{aligned}&|\varepsilon B(u_\varepsilon, \nu) - (u_\varepsilon, L_1^*\nu)| \leqslant \\ &\leqslant C\left\{\varepsilon\left[\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right\|\right] + \|u_\varepsilon\|\right\} \cdot \left\{\left\|\rho\frac{\partial \nu}{\partial \rho}\right\| + \left\|\frac{\partial \nu}{\partial \theta}\right\| + \|\nu\|\right\},\end{aligned} \tag{5.47}$$

причем мы воспользовались (5.43). Так как

$$\|\nu\| + \left\|\frac{\partial \nu}{\partial \theta}\right\| + \left\|\rho\frac{\partial \nu}{\partial \rho}\right\| = O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{5.48}$$

и $\|(h, \nu)\| \leqslant \|h\| \cdot \|\nu\| = O(\sqrt{\varepsilon})$, то отсюда и из (5.47), (5.46), (5.45) выводим (5.41), что и требовалось доказать.

Так как нормы u_ε равномерно ограничены: $\|u_\varepsilon\| \leqslant M\|h\|$ (см. (5.1)), и функции ψ образуют плотное множество в $\mathcal{L}_2(Q)$, то из (5.41) и (5.42) вытекает слабая сходимость u_ε к w в $\mathcal{L}_2(Q)$.

6. Доказательство теоремы 7. Используя (4.25) и (4.27), легко выведем, что

$$L_\varepsilon w = h + \varepsilon O\left[(y - y_0)^{\frac{1}{p} - 2} + (y_1 - y)^{\frac{1}{q} - 2}\right]. \tag{5.49}$$

Отметим также, что на Γ^- вблизи точки A

$$\varphi = O(x_1(y) - x_0(y)) = O\left[(y - y_0)^{\frac{1}{p}}\right]; \quad y - y_0 = O(\varphi^p) \tag{5.50}$$

и аналогично в окрестности точки B. Поэтому вблизи A согласно (4.25) имеем:

$$w(x_0(y), y) = w(0, \varphi) = O(x_1(y) - x_0(y)) = O\left((y - y_0)^{\frac{1}{p}}\right) = O(\varphi). \tag{5.50'}$$

Ограничимся во всем дальнейшем, для простоты, случаем $p=2$, $q=2$.

Заменим граничное значение $w(0, \varphi)$ функции w через

$$\widetilde{w}(\varphi)=w(0, \varphi)\,\zeta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon^\beta}\right)\zeta\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon^\beta}\right),$$

где $\zeta(\xi)$ — гладкая функция, $\zeta(\xi)=0$ при $\xi\leqslant\frac{1}{2}$ и $\zeta(\xi)=1$ при $\xi\geqslant 1$; показатель $\beta<1$ и будет дальше точнее определен; $\varphi_1=\Phi-\varphi$; Φ — координата точки B на Γ^-. Очевидно, $\widetilde{w}(\varphi)$ отличается от $w(0, \varphi)$ лишь в окрестностях порядка ε^β точек A и B. Пусть v_0 — погранслой, определяемый из условий (4.32), (4.33′), где $w(0, \varphi)$ заменено на $\widetilde{w}(\varphi)$, а v_1 — функция типа погранслоя, определяемая из уравнения (4.35) для $i=1$ ($N=1$) при условии $v_1|_{\Gamma^-}=0$. Положим

$$\widetilde{v}_\varepsilon=\zeta_1\left(\frac{\rho}{\varepsilon^\alpha}\right)[v_0+\varepsilon v_1],$$

где $\zeta_1(\xi)$ — гладкая функция, $\zeta_1(\xi)=1$ для $\xi\leqslant\frac{1}{2}$, $\zeta_1(\xi)=0$ для $\xi\geqslant 1$; $\alpha<1$. Предполагается, что $\frac{1}{2}<2\beta\leqslant\alpha$, $\alpha+\beta<1$.

Докажем, что во всей области Q

$$L_\varepsilon\widetilde{v}_\varepsilon=\varepsilon O\left(\frac{1}{(y-y_0)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(y_1-y)^{\frac{3}{2}}}\right), \tag{5.51}$$

т. е. применение оператора L_ε к погранслою $\widetilde{v}_\varepsilon$ дает выражение такого же порядка, как второе слагаемое правой части (5.49) при $p=q=2$. Достаточно провести все оценки лишь в окрестности точки A.

Согласно (5.50′) имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\widetilde{w}(\varphi)=O(\varphi),\\
&\widetilde{w}'(\varphi)=w(0, \varphi)\zeta'_\varphi+w'_\varphi(0, \varphi)\cdot\zeta=O(1),\\
&\widetilde{w}''_\varphi(\varphi)=O(\varphi^{-1}),\\
&\widetilde{w}'''_\varphi(\varphi)=O(\varphi^{-2}).
\end{aligned}\right\} \tag{5.52}$$

При этом мы воспользовались тем, что там, где $\zeta'_\varphi\neq 0$, т. е. для $\frac{1}{2}\varepsilon^\beta<\varphi<\varepsilon^\beta$, имеем $\zeta'_\varphi=\frac{1}{\varepsilon^\beta}\zeta'_\xi=O(\varphi^{-1})$, и аналогичными оценками для ζ''_φ и ζ'''_φ. Далее заметим, что аналогичные оценки имеют место для $v_0=\widetilde{w}(\varphi)e^{-\frac{\lambda(\varphi)\rho}{\varepsilon}}$, ввиду того, что $\lambda(\varphi)=O(\varphi)$, $\lambda'(\varphi)=O(1)$, $\lambda''(\varphi)=O(1)$, $\lambda'''(\varphi)=O(1)$. Действительно (ρ—нормаль к Γ),

$$(v_0)'_\varphi=\widetilde{w}'(\varphi)\cdot e^{-\lambda(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}}-\widetilde{w}(\varphi)\cdot\frac{\lambda'(\varphi)}{\lambda(\varphi)}\left(\frac{\rho\lambda(\varphi)}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}}=O(1)$$

и аналогично

$$(v_0)''_\varphi=O(\varphi^{-1}),\quad (v_0)'''_\varphi=O(\varphi^{-2}).$$

Заметим теперь, что оператор R_1 содержит дифференцирование по t до второго порядка, дифференцирование по φ до первого порядка и множители t степени $\leqslant 1$. Так как дифференцирование по t повышает порядок малости v_0, вблизи A на единицу: $\frac{\partial v_0}{\partial t} = -\lambda(\varphi)\widetilde{w}(\varphi)e^{-\lambda(\varphi)t} = O(\varphi^2)$, множитель t понижает порядок малости на единицу у выражений вида $v = O(\varphi^k)e^{-\lambda(\varphi)t}$, $tv = tO(\varphi^k)\cdot e^{-\lambda(\varphi)t} = O(\varphi^k)\lambda^{-1}(\lambda t)e^{-\lambda t} = O(\varphi^{k-1})e^{-\lambda t}$, и точно так же убеждаемся в том, что дифференцирование по φ понижает порядок на единицу, например $\frac{\partial}{\partial\varphi}(v_0) = \widetilde{w}'(\varphi)e^{-\lambda t} - \widetilde{w}\cdot\lambda'(\varphi)te^{-\lambda t} = O(1)e^{-\lambda t} - \lambda'\widetilde{w}\lambda^{-1}(\lambda t)e^{-\lambda t} = O(1)e^{-\lambda t}$, то

$$R_1 v_0 = O(1)e^{-\lambda(\varphi)t}. \tag{5.53}$$

Напомним теперь, что функцию v_1 мы определяем методом подбора из уравнения

$$M_0 v_1 \equiv \alpha(\varphi)\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \delta(\varphi)\frac{\partial v_1}{\partial t} = -R_1 v_0 = -[A(\varphi)t + B(\varphi)]e^{-\lambda t}.$$

Отсюда находим, что $v_1 = \frac{1}{\alpha(\varphi)}t\left[\frac{A}{2\lambda}t + \frac{B}{\lambda}\right]e^{-\lambda t}$. Следовательно, ввиду того, что v_1 получается из $R_1 v_0$ с помощью умножения на t и деления на $\lambda(\varphi)$, то $v_1 = O(\varphi^{-2})$. Итак,

$$v_0 + \varepsilon v_1 = O\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{\varphi^2}\right). \tag{5.54}$$

Производная по φ понижает на единицу порядок v_1 по φ, производная по t увеличивает на единицу, а множитель t понижает порядок такой функции на единицу. Следовательно,

$$R_1 v_1 = O\left(\frac{1}{\varphi^3}\right). \tag{5.53'}$$

Выражение для $R_2 v$ содержит производные по φ до второго порядка; пользуясь сказанным выше, найдем, что

$$R_2 v_0 = O(\varphi^{-1}), \qquad R_2 v_1 = O(\varphi^{-4}). \tag{5.53''}$$

Согласно формуле (4.30), записанной для $N = 1$, пользуясь (5.53′) и (5.53″), получим для $\bar{v} = v_0 + \varepsilon v_1$:

$$L_\varepsilon \bar{v} = L_\varepsilon(v_0 + \varepsilon v_1) = \varepsilon R_1 v_1 + \varepsilon R_2 v_0 + \varepsilon^2 R_2 v_1 = \\ = O\left(\frac{\varepsilon}{\varphi^3} + \frac{\varepsilon}{\varphi} + \frac{\varepsilon^2}{\varphi^4}\right) = O\left(\frac{\varepsilon}{\varphi^3} + \frac{\varepsilon^2}{\varphi^4}\right). \tag{5.55}$$

Имеем для $\widetilde{v}_\varepsilon = \zeta_1\left(\frac{\rho}{\varepsilon^\alpha}\right)(v_0 + \varepsilon v_1)$:

$$L_\varepsilon\widetilde{v}_\varepsilon = L_\varepsilon(\zeta_1\bar{v}) = \zeta_1 L_\varepsilon\bar{v} + \varepsilon\bar{v}L_2\zeta_1 + \bar{v}\gamma\frac{d\zeta_1}{d\rho} + \\ + \varepsilon O\left[\left(\left|\frac{\partial\bar{v}}{\partial\rho}\right| + \left|\frac{\partial\bar{v}}{\partial\varphi}\right|\right)\left(\left|\frac{d\zeta_1}{d\rho}\right|\right)\right] = O\left(\frac{\varepsilon}{\varphi^3} + \frac{\varepsilon^2}{\varphi^4}\right) + \varepsilon O\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{\varphi^2}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}}\right) + \\ + O\left(\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{\varphi^2}\right)\right) + \varepsilon O\left[\left(\frac{\varphi}{\varepsilon}\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{\varphi^2}\right) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varphi^3}\right)\right)\cdot\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\right]^{1)}. \tag{5.56}$$

Отметим, что в выражения для $O(\ )$ входит множитель $e^{-\lambda(\varphi)t} = e^{-\lambda(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}}$.

---

[1]) Без ограничения общности мы считаем, что в L_2 входят лишь члены второго порядка.

Следовательно, для $\frac{1}{2}\varepsilon^\beta < \varphi$ и $\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha < \rho < \varepsilon^\alpha$

$$e^{-\lambda(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}} \leqslant e^{-\frac{K\cdot\varphi\cdot\varepsilon^\alpha}{\varepsilon}} \leqslant e^{-K_1\varepsilon^{\beta+\alpha-1}} = O(\varepsilon^n) \qquad (\alpha+\beta<1)$$

для любого n, и

$$L_\varepsilon(\widetilde{v}_\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{n_1}\left(\frac{\varepsilon}{\varphi^3}+\frac{\varepsilon^2}{\varphi^4}\right)\right) = O\left(\frac{\varepsilon}{\varphi^3}+\frac{\varepsilon^2}{\varphi^4}\right). \tag{5.57}$$

Для $\varphi < \frac{1}{2}\varepsilon^\beta$ $\widetilde{v}_\varepsilon \equiv 0$, и эта оценка также остается в силе. Для $\rho < \frac{1}{2}\varepsilon^\alpha$ $\widetilde{v}_\varepsilon = \overline{v}$, и согласно (5.55) она также верна.

Пусть y и $\widetilde{y}$ — ординаты двух точек $D(\varphi, \rho)$, $D(\varphi, 0)$ трансверсали $\varphi = \mathrm{const}$ при $\rho < \varepsilon^\alpha$ и $\varphi > \frac{1}{2}\varepsilon^\beta$ (т. е. там, где $\widetilde{v}_\varepsilon \not\equiv 0$). Тогда

$$y - y_0 \leqslant \widetilde{y} - y_0 + \rho \leqslant C\varphi^2 + \varepsilon^\alpha = C\varphi^2 + (\varepsilon^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}} = C\varphi^2 + C_1\varphi^{\frac{\alpha}{\beta}} \leqslant C_2\varphi^2 \qquad (\alpha \geqslant 2\beta). \tag{5.58}$$

Отсюда выводим, что

$$\frac{\varepsilon}{\varphi^3} \leqslant C_3\frac{\varepsilon}{(y-y_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

Учитывая, что для $\varphi > \frac{1}{2}\varepsilon^\beta$, $\beta < 1$, $\frac{\varepsilon}{\varphi} < C$, имеем для указанных выше ρ и φ:

$$\frac{\varepsilon^2}{\varphi^4} \leqslant C_4\frac{\varepsilon}{(y-y_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

Следовательно, оценка (5.51) установлена.

После того как установлена оценка (5.51), уже легко найти оценку в Q для невязки z. Согласно (4.21), (5.49) и (5.51) имеем:

$$L_\varepsilon z = \varepsilon O\left((y-y_0)^{-\frac{3}{2}} + (y_1-y)^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad (z = u_\varepsilon - (w + \widetilde{v}_\varepsilon)). \tag{5.59}$$

Так как

$$L_\varepsilon(u_\varepsilon - w) = -\varepsilon L_2 w = \varepsilon O\left((y-y_0)^{-\frac{3}{2}} + (y_1-y)^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{5.60}$$

и

$$(u_\varepsilon - w)|_\Gamma = O(\varphi\cdot\varphi_1) = O\left((y-y_0)^{\frac{1}{2}}\cdot(y_1-y)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{5.61}$$

то для оценки $u_\varepsilon - w$ вблизи точек A и B можно использовать барьер $\eta = m_0(y-y_0)^{\frac{1}{2}}(y_1-y)^{\frac{1}{2}}$, так как

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(\eta) = &-m_0\left(\varepsilon c(x, y)\frac{1}{4}(y-y_0)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}f(y-y_0)^{\frac{1}{2}}\right)(y_1-y)^{\frac{1}{2}} - \\ &-m_0\left(\varepsilon c(x, y)\frac{1}{4}(y_1-y)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}f(y_1-y)^{\frac{1}{2}}\right)(y-y_0)^{\frac{1}{2}} + \\ &+2m_0\left[\frac{1}{4}\varepsilon c(x, y)(y-y_0)^{-\frac{1}{2}}(y_1-y)^{-\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Так как без ограничения общности можно считать, что $y_1 - y_0 < 1$, то

$$m_0[(y-y_0)^{-\frac{3}{2}}(y_1-y)^{\frac{1}{2}} + (y_1-y)^{-\frac{3}{2}}(y-y_0)^{\frac{1}{2}} - 2(y-y_0)^{\frac{1}{2}}(y_1-y)^{\frac{1}{2}}] \geqslant$$
$$\geqslant C_1 m_0[(y-y_0)^{-\frac{3}{2}} + (y_1-y)^{-\frac{3}{2}}], \qquad C_1 > 0, \quad (5.63)$$

и

$$L_\varepsilon(\eta) \leqslant -\frac{1}{4}\varepsilon C m_0[(y-y_0)^{-\frac{3}{2}} + (y_1-y)^{-\frac{3}{2}}]. \quad (5.64)$$

Взяв m_0 достаточно большим, можно добиться того, чтобы модуль правых частей (5.60) и (5.61)

$$|\varepsilon O((y-y_0)^{-\frac{3}{2}} + (y_1-y)^{-\frac{3}{2}})| \leqslant \frac{1}{4} C m_0 \varepsilon [(y-y_0)^{-\frac{3}{2}} + (y_1-y)^{-\frac{3}{2}}], \quad (5.65)$$

$$|O((y-y_0)^{\frac{1}{2}} + (y_1-y)^{\frac{1}{2}})| \leqslant \eta(y). \quad (5.66)$$

Согласно (5.64), (5.65) и (5.66) функция η может служить барьером для $u_\varepsilon - w$, и, следовательно, в силу принципа максимума, примененного к функциям $u_\varepsilon - w + \eta$, $-(u_\varepsilon - w) + \eta$, получим:

$$|u_\varepsilon - w| \leqslant m_0(y-y_0)^{\frac{1}{2}}(y_1-y)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.66')$$

Для $\varphi \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon^\beta$, $\varphi_1 \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon^\beta$, а значит, для $y - y_0 \geqslant C\varepsilon^{2\beta}$, $y_1 - y \geqslant C\varepsilon^{2\beta}$

$$v_\varepsilon = \zeta_1(v_0 + \varepsilon v_1) = O\left(\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{\varphi^2}\right)\cdot\left(\varphi_1 + \frac{\varepsilon}{\varphi_1^2}\right)\right) =$$
$$= O\left(\left((y-y_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{y-y_0}\right)\left((y_1-y)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{y_1-y}\right)\right)$$

(см. (5.54)), и в силу (5.66')

$$z_\varepsilon = u_\varepsilon - w - v_\varepsilon = O\left[\left((y-y_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{y-y_0}\right)\left((y_1-y)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{y_1-y}\right)\right],$$

т. е. для $y - y_0 \geqslant C\varepsilon^{2\beta}$, $y_1 - y \geqslant C\varepsilon^{2\beta}$

$$|z_\varepsilon| \leqslant M[((y-y_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{y-y_0})((y_1-y)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{y_1-y})]. \quad (5.67)$$

В качестве второй барьерной функции возьмем

$$\eta_1 = \varepsilon M m_1[(y-y_0)^{-\frac{3}{2}} + (y_1-y)^{-\frac{3}{2}}],$$

$$L_\varepsilon\eta_1 = \varepsilon M m_1\left[\frac{15}{4}\varepsilon c(x, y)(y-y_0)^{-2} - \frac{1}{2}f\right](y-y_0)^{-\frac{3}{2}} +$$
$$+ \varepsilon M m_1\left[\frac{15}{4}\varepsilon c(x, y)(y_1-y)^{-2} - \frac{1}{2}f\right](y_1-y)^{-\frac{3}{2}}. \quad (5.68)$$

Правая часть (5.68) будет заведомо отрицательной, если

$$\frac{15}{4}\varepsilon c(x, y)(y-y_0)^{-2} - \frac{1}{2}f \leqslant -\gamma^2, \qquad \frac{15}{4}\varepsilon c(x, y)(y_1-y)^{-2} - \frac{1}{2}f \leqslant -\gamma^2, \quad (5.69)$$

и так как $f \geqslant \omega^2 > 0$, то (5.69) выполнено для

$$y - y_0 \geqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_1^2, \qquad y_1 - y \geqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_1^2, \qquad \delta_1 > 0. \quad (5.70)$$

Для таких y имеем

$$L_\varepsilon\eta_1 \leqslant -\gamma^2 M m_1\varepsilon\left[(y-y_0)^{-\frac{3}{2}}+(y_1-y)^{-\frac{3}{2}}\right]. \tag{5.70′}$$

Заметим теперь, что неравенство

$$\eta_1=\varepsilon M m_1\left[(y-y_0)^{-\frac{3}{2}}+(y_1-y)^{-\frac{3}{2}}\right]\geqslant$$
$$\geqslant M\left[\left((y-y_0)^{\frac{1}{2}}+\frac{\varepsilon}{y-y_0}\right)\left((y_1-y)^{\frac{1}{2}}+\frac{\varepsilon}{y_1-y}\right)\right] \tag{5.71}$$

заведомо выполняется, если

$$\varepsilon m_1(y-y_0)^{-\frac{3}{2}}\geqslant(y-y_0)^{\frac{1}{2}}+\frac{\varepsilon}{y-y_0} \quad\text{и}\quad \varepsilon m_1(y_1-y)^{-\frac{3}{2}}\geqslant(y_1-y)^{\frac{1}{2}}+\frac{\varepsilon}{y_1-y}$$

или, так как $|y-y_0|<1$, $|y_1-y|<1$ $(m_1>1)$, то достаточно, чтобы

$$\varepsilon(m_1-1)\geqslant(y-y_0)^2, \qquad \varepsilon(m_1-1)\geqslant(y_1-y)^2,$$

т. е.

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}(m_1-1)^{\frac{1}{2}}\geqslant y-y_0, \qquad \varepsilon^{\frac{1}{2}}(m_1-1)^{\frac{1}{2}}\geqslant y_1-y. \tag{5.72}$$

Взяв m_1 столь большим, чтобы $(m_1-1)^{\frac{1}{2}}\geqslant\delta_1^2$ и чтобы $\gamma^2 M m_1\varepsilon\left[(y_1-y)^{-\frac{3}{2}}+(y-y_0)^{-\frac{3}{2}}\right]$ было больше модуля правой части (5.59), мы из (5.67), (5.71) и (5.70), (5.70′) выводим, что в подобласти $Q_1\subset Q$, ограниченной Γ^-, Γ^+ и прямыми

$$y-y_0=(m_1-1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \qquad y_1-y=(m_1-1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

справедливы соотношения

$$|Lz_\varepsilon|\leqslant -L_\varepsilon\eta_1, \tag{5.72′}$$
$$0=z_\varepsilon|_{\Gamma_1^-}<\eta_1, \qquad 0=z_\varepsilon|_{\Gamma_1^+}<\eta_1 \tag{5.73}$$

и при $y-y_0=(m_1-1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ и $y_1-y=(m_1-1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$,

$$|z_\varepsilon|\leqslant\eta_1, \tag{5.74}$$

где $\Gamma_1^-=\Gamma^-\cap\left(y_0+(m_1-1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\leqslant y\leqslant y_1-(m_1-1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$, и аналогично определяется Γ_1^+ [1]). В силу принципа максимума из (5.72′), (5.73) и (5.74) выте-

---

[1]) На Γ_1^- $z_\varepsilon=0$ для достаточно малых ε, так как тогда на Γ_1^- $(\tilde{v}_\varepsilon+w)|_{\Gamma_1^-}=0$. Действительно, $\tilde{v}_\varepsilon=\zeta_1(v_0+\varepsilon v_1)$, v_0 мы строим по граничному значению

$$\tilde{w}(\varphi)=\zeta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon^\beta}\right)\zeta\left(\frac{\varphi_1}{\varepsilon^\beta}\right)w(0,\varphi),$$

$v_1|_{\Gamma^-}=0$. На Γ_1^- $\zeta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon^\beta}\right)=1$, так как $y-y_0\geqslant\varepsilon^{\frac{1}{2}}(m_1-1)^{\frac{1}{2}}$, и, значит, $\varphi\geqslant C_1\varepsilon^{\frac{1}{4}}$. Так как $\beta>\frac{1}{4}$, то для достаточно малых ε $\zeta\left(\frac{\varphi}{\varepsilon^\beta}\right)=1$, $\tilde{w}(\varphi)=w(0,\varphi)$ и $(w+\tilde{v}_\varepsilon)|_{\Gamma_1^-}=0$, а вместе с тем и $z_\varepsilon|_{\Gamma_1^-}=0$.

кает оценка

$$|z_\varepsilon| \leqslant \eta_1 = \varepsilon M m_1 \left((y-y_0)^{-\frac{3}{2}} + (y_1-y)^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{5.75}$$

для $y-y_0 \geqslant (m_1-1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ и $y_1-y \geqslant (m_1-1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Оценки (5.67) и (5.75) можно объединить для таких y в одну общую оценку

$$|z_\varepsilon| \leqslant C \min\left[(y-y_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{y-y_0},\ (y_1-y)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{y_1-y},\ \varepsilon(y-y_0)^{-\frac{3}{2}},\ \varepsilon(y_1-y)^{-\frac{3}{2}}\right]. \tag{5.76}$$

Для $y-y_0 < (m_1-1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ и $y_1-y < (m_1-1)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ ограничимся оценкой

$$|u_\varepsilon - w| \leqslant C(y-y_0)^{\frac{1}{2}}(y_1-y)^{\frac{1}{2}},$$

имеющей место в силу (5.66′).

§ 6. Регулярные вырождения и итерационные процессы в случае уравнений в частных производных высших порядков

1. Общая постановка задачи. Мы рассмотрим общую задачу. В n-мерном пространстве задана область Q с кусочно-гладкой границей Γ. Через L_s мы будем обозначать линейный дифференциальный оператор s-го порядка, действующий на функции $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$, заданные в Q. Задача A_0 заключается в решении дифференциального уравнения k-го порядка

$$L_k u = h \tag{6.1}$$

при граничных условиях, вообще говоря, разных на разных частях Γ_i $i = 1, 2, \ldots, p$) границы Γ: на Γ_i

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\Gamma_i} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, k_i - 1). \tag{6.2}$$

Задача A_ε заключается в решении уравнения более высокого $k+l$-го порядка

$$L_\varepsilon u \equiv L_k u + \sum_{s=1}^{l} \varepsilon^s L_{k+s} u = h \tag{6.3}$$

при граничных условиях (6.2) и дополнительных условиях: на Γ_i

$$\left.\frac{\partial^{k_i+r} u}{\partial n^{k_i+r}}\right|_{\Gamma_i} = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, l_i - 1) \tag{6.4}$$

(числа k_i, l_i, вообще говоря, различны на разных частях Γ_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) границы Γ).

Примеры. В задачах §§ 1 и 2 граница состояла из двух частей ($p = 2$): точек $x = 0$ и $x = 1$, для которых числа k_1 и k_2, l_1 и l_2 были, говоря вообще, различными. В задаче п. 2 § 4 граница Γ состояла из двух частей: $\Gamma_1 = \Gamma^+$, $\Gamma_2 = \Gamma^-$; $k_1 = 1$, $l_1 = 0$; $k_2 = 0$, $l_2 = 1$.

Введем теперь, как мы это делали в § 4, местные координаты в окрестностях каждой части Γ_i границы. Положение точки A на Γ_i определяется координатами $\varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Из каждой точки $A \in \Gamma_i$ проведем трансверсаль AB длины $\eta > 0$ (т. е. вектор, направленный внутрь Q и образующий с касательной плоскостью угол, отличный от нулевого) так, чтобы система трансверсалей обладала степенью гладкости, отвечающей гладкости самого куска Γ_i, и чтобы при достаточно малом η трансверсали попарно не пересекались. Множество этих трансверсалей заполняет часть $Q_\eta^{(i)}$ области Q, прилегающую к Γ_i. Определим в $Q_\eta^{(i)}$ координаты $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Если AB — трансверсаль из $Q_\eta^{(i)}$, выходящая из точки A с координатами $\varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ на Γ_i, то для любой точки $C \in AB$ ее координаты $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ определяются следующим образом: координата ρ означает ее расстояние до точки A, а $\varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$—это координаты A на Γ_i. Уравнение $\rho=0$ определяет Γ_i, а $\varphi_i=\text{const}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$—трансверсаль. В новой системе координат дифференциальные операторы s-го порядка перейдут в операторы того же порядка, которые будем по-прежнему обозначать через L_s. Имеем:

$$\varepsilon^r L_{k+r} = \varepsilon^r \left\{ a_{k+r}(\rho, \varphi) \frac{\partial^{k+r} u}{\partial \rho^{k+r}} + \sum_{j=1}^{k+r} \sum_{s \leq j} \sum_{(s)} b_{j,(s)}(\rho, \varphi) \frac{\partial^{k+r-j}}{\partial \rho^{k+r-j}} D^{(s)} u \right\}, \tag{6.5}$$

где (s) — набор неотрицательных чисел s_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$: $(s)=(s_1, \ldots, s_{n-1})$, для которых $\sum_{i=1}^{n-1} s_i = s$, $D^{(s)} = \dfrac{\partial^s}{\partial \varphi_1^{s_1} \ldots \partial \varphi_{n-1}^{s_{n-1}}}$.

Предполагая коэффициенты a_{k+r}, $b_{j,(s)}$ соответствующее число раз дифференцируемыми по ρ, представим a_{k+r} в виде конечного степенного ряда по ρ с остаточным членом $N+1$-го порядка, именно: если $a_{k+r}(\varphi) = a_{k+r}(0, \varphi)$, то

$$a_{k+r}(\rho, \varphi) = a_{k+r}(\varphi) + \sum_{\sigma=1}^{N} a_{k+r,\sigma}(\varphi) \rho^\sigma + c_{k+r}(\rho, \varphi) \rho^{N+1} \tag{6.6}$$

и аналогично, если $b_{j,(s)}(0, \varphi) = b_{j,(s)}(\varphi)$, то

$$b_{j,(s)}(\rho, \varphi) = b_{j,(s)}(\varphi) + \sum_{\sigma=1}^{N-j} b_{j,(s),\sigma}(\varphi) \rho^\sigma + d_{k+r,j,(s)}(\rho, \varphi) \rho^{N-j+1}. \tag{6.6$'$}$$

Заменим координату ρ на $t = \frac{\rho}{\varepsilon}$, тогда $\frac{\partial^p}{\partial \rho^p} = \varepsilon^{-p} \frac{\partial^p}{\partial t^p}$ и в силу (6.6) и (6.6′)

$$a_{k+r}(\rho, \varphi) \frac{\partial^{k+r} u}{\partial \rho^{k+r}} = \varepsilon^{-(k+r)} \left[a_{k+r}(\varphi) + \sum_{\sigma=1}^{N} \varepsilon^\sigma t^\sigma a_{k+r,\sigma}(\varphi) + \varepsilon^{N+1} t^{N+1} c_{k+r}(\rho, \varphi) \right] \frac{\partial^{k+r} u}{\partial t^{k+r}}, \tag{6.7}$$

$$b_{j,(s)}(\rho, \varphi) \frac{\partial^{k+r-j}}{\partial \rho^{k+r-j}} D^{(s)} u = \varepsilon^{-(k+r)+j} \left[b_{j,(s)}(\varphi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\sigma=1}^{N-j} \varepsilon^\sigma t^\sigma b_{j,(s),\sigma}(\varphi) + \varepsilon^{N-j+1} t^{N-j+1} d_{k+r,j,(s)}(\rho, \varphi) \right] \frac{\partial^{k+r-j}}{\partial t^{k+r-j}} D^{(s)} u. \tag{6.7$'$}$$

Из (6.5), (6.7) и (6.7′) следует:

$$\varepsilon^r L_{k+r} u = \varepsilon^{-k} \left\{ a_{k+r}(\varphi) \frac{\partial^{k+r} u}{\partial t^{k+r}} + \varepsilon L_{k+r}^{(1)} u + \ldots + \varepsilon^N L_{k+r}^{(N)} u + \varepsilon^{N+1} L_{k+r}^{(N+1)} u \right\}, \tag{6.8}$$

где

$$L_{k+r}^{(1)} u = t a_{k+r,1}(\varphi) \frac{\partial^{k+r} u}{\partial t^{k+r}} + \sum_{s=0}^{1} b_{1,(s)}(\varphi) \frac{\partial^{k+r-1}}{\partial t^{k+r-1}} D^{(s)} u$$

и вообще $L_{k+r}^{(i)}$, $i \leqslant N$ — линейные дифференциальные операторы относительно t, φ с коэффициентами при производных вида $c(\varphi)t^j$, $0 \leqslant j \leqslant i$, $c(\varphi)$ — функции φ.

Наконец, коэффициенты оператора $L_{k+r}^{(N+1)}$ имеют вид $c_{k+r}(\rho, \varphi)t^{N+1}$, $d_{k+r, j, (s)}(\rho, \varphi)t^{N+1-j}$, где c_{k+r} и $d_{k+r, j, (s)}$ — независимые от ε ограниченные функции от ρ, φ (см. (6.7), (6.7')).

Из (6.8) следует:

$$L_\varepsilon u = \sum_{r=0}^{l} \varepsilon^r L_{k+r} u = \varepsilon^{-k}\left\{M_0 u + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j R_j u + \varepsilon^{N+1} R_{N+1} u\right\}, \tag{6.9}$$

где

$$M_0 u = \sum_{r=0}^{l} a_{k+r}(\varphi) \frac{\partial^{k+r} u}{\partial t^{k+r}} \tag{6.10}$$

— дифференциальный оператор по t с не зависящими от t коэффициентами.

В линейных операторах R_j, $i \leqslant N$ коэффициенты имеют вид $\sum_{j \leqslant i} f_j(\varphi)t^j$, в R_{N+1} — вид $\sum_{j \leqslant N+1} d_j(\rho, \varphi)t^j$, где $d_j(\rho, \varphi)$ — не зависящие от ε функции ρ, φ.

Сохраняя терминологию § 2, назовем алгебраическое уравнение

$$\lambda^k Q_\varphi(\lambda) = \sum_{r=0}^{l} a_{k+r}(\varphi)\lambda^{k+r} = 0 \tag{6.11}$$

дополнительным характеристическим уравнением в точке φ части Γ_i границы Γ. Мы скажем: *вырождение задачи A_ε в задачу A_0 регулярно, если в каждой внутренней точке каждой части Γ_i границы Γ число корней дополнительного характеристического уравнения с отрицательной вещественной частью совпадает с числом l_i условий* (6.4) *задачи A_ε, выпадающих при переходе к задаче A_0.*

Мы проведем дальнейшие рассмотрения сначала для случая, когда $k = 2k_1$ и $l = 2l_1$ — числа четные и задачи A_ε и A_0 суть первые краевые задачи для эллиптических уравнений порядка $2(k_1 + l_1)$ и $2k_1$. В этом случае граничные условия (6.2) и (6.4) имеют одинаковый вид для всей границы (число p частей Γ_i равно 1: $\Gamma_1 = \Gamma$).

2. Вырождение эллиптических уравнений в эллиптические. Итак, пусть задача A_0 есть первая краевая задача для эллиптического уравнения порядка $2k_1$

$$L_{2k_1} u = h \tag{6.1'}$$

при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_\Gamma = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, k_1 - 1). \tag{6.2'}$$

Задача A_ε заключается в решении эллиптического уравнения

$$L_\varepsilon u = \sum_{r=0}^{2l_1} \varepsilon^r L_{2k_1+r} u = h \tag{6.3'}$$

порядка $2(k_1+l_1)$ при граничных условиях (6.2′) и дополнительных граничных условиях

$$\frac{\partial^{k_1+r}u}{\partial n^{k_1+r}}\Big|_{\Gamma}=0 \qquad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ l_1-1). \tag{6.4′}$$

Эллиптичность L_ε означает эллиптичность старшего оператора $L_{2(k_1+l_1)}$.

Считая границу Γ достаточно гладкой, можно построить единую полосу Q_η, заполненную трансверсалями длины η. (В качестве трансверсалей можно взять, например, в данном случае нормали к Γ.) В этой полосе введем, как указывалось выше, систему координат $(\rho,\ \varphi)$ $(\varphi(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{n-1}))$, в которой уравнением Γ будет $\rho=0$; заменяя ρ координатой $t=\frac{\rho}{\varepsilon}$, получим разложение (6.9) оператора L_ε в окрестности Γ:

$$L_\varepsilon u=\varepsilon^{-2k_1}\Big(M_0u+\sum_{r=0}^{N}\varepsilon^jR_ju+\varepsilon^{N+1}R_{N+1}\,u\Big), \tag{6.9′}$$

$$M_0u=\sum_{r=0}^{2l_1}a_{2k_1+r}(\varphi)\,\frac{\partial^{2k_1+r}u}{\partial t^{2k_1+r}}. \tag{6.10′}$$

Регулярность вырождения в нашем случае означает: *дополнительное характеристическое уравнение в каждой точке φ границы, принимающее вид*

$$P_{2(k_1+l_1)}(\lambda)\equiv\lambda^{2k_1}Q_\varphi(\lambda)\equiv\sum_{r=0}^{2l_1}a_{2k_1+r}(\varphi)\,\lambda^{2k_1+r}=0, \tag{6.11′}$$

имеет ровно l_1 корней с отрицательными вещественными частями, т. е. столько, сколько условий (6.4′) задачи A_ε выпадает при переходе к задаче A_0.

Мы считаем, что выполнены следующие условия:

I. Задача A_0 разрешима: например, при любой правой части $h\in\mathscr{L}_2$ уравнение (6.1′) при граничных условиях (6.2′) имеет решение w, $\|w\|_1\leqslant C\|h\|$, C — константа (это значит, что 0 не является собственным значением оператора L_{2k_1} при условиях (6.2′)); $\|\ \|_1$ — норма, вообще говоря, более сильная, чем норма $\|\ \|$.

II. Вырождение задачи A_ε в задачу A_0 — регулярное, т. е. уравнение (6.11′) имеет ровно l_1 корней с отрицательными вещественными частями.

III. Задачи A_ε равномерно разрешимы, т. е. они для всех достаточно малых ε и для любого h, например из $\mathscr{L}_2$, имеют решение u_ε, причем

$$\|u_\varepsilon\|_2\leqslant C_1\|h\|, \tag{6.12}$$

где $C_1>0$ не зависит от ε и от h, $\|\ \|_2$ — норма, вообще говоря, более сильная, чем норма $\|\ \|$ в $\mathscr{L}_2$ и чем норма $\|\ \|_1$. (Подробнее об этом см. § 7.)

IV. Решения задачи A_0 при достаточно гладких правых частях настолько гладки, что к ним можно применять те операции, о которых идет речь ниже.

Требование IV будет выполняться, если граница Γ, коэффициенты оператора L_{2k_1} и правые части достаточно гладкие. В следующем параграфе будут приведены условия, достаточные для выполнения I — IV.

При выполнении условий I — IV проходит итерационный процесс, аналогичный описанному в § 2 (и § 5), заключающийся в последовательном получении функций w_i, v_i, α_i $(i=0, 1, \ldots)$ таких, что решение u_ε задачи A_ε представляется в виде

$$u_\varepsilon = w_0 + \Big(\sum_{s=1}^{m} \varepsilon^s w_s + \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^{r+1}\alpha_r + \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r v_r\Big) + z_m, \tag{6.13}$$

при этом

$$\| L_\varepsilon z_m \| = O(\varepsilon^{m+1}) \tag{6.14}$$

(в данном случае следует взять $N = m + k_1$). w_0 определяется (ср. § 2) как решение задачи A_0:

$$L_{2k_1} w_0 = h \tag{6.15}$$

при граничных условиях (6.2′). Но w_0 не удовлетворяет условиям (6.4′). v_0 есть функция типа погранслоя, компенсирующая невязки в выполнении этих условий функцией w_0. Именно, v_0 есть решение типа погранслоя дифференциального уравнения с постоянными относительно t коэффициентами

$$M_0 v_0 = \sum_{r=0}^{2l_1} a_{2k_1+r} \frac{\partial^{2k_1+r} v_0}{\partial t^{2k_1+r}} = 0. \tag{6.16}$$

Характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (6.16) является уравнение (6.11′).

Условие регулярности означает: *уравнение* (6.11′) *имеет* l_1 *корней* $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_{l_1}$ *с отрицательными вещественными частями* ($\lambda_i = \lambda_i(\varphi)$ зависят от φ). Этим корням отвечают (мы предполагаем для простоты эти корни простыми) частные решения типа погранслоя уравнения (6.16)

$$\exp(-\lambda_i t) = \exp\Big(-\lambda_i \frac{\rho}{\varepsilon}\Big).$$

Общее решение v_0 уравнения (6.16) типа погранслоя имеет вид

$$v_0 = \varepsilon^{k_1} \sum_{i=1}^{l_1} c_i \exp(-\lambda_i t) = \varepsilon^{k_1} \sum_{i=1}^{l_1} c_i \exp\Big(-\lambda_i \frac{\rho}{\varepsilon}\Big),$$

где $c_i = c_i(\varphi)$ зависят от φ. Коэффициенты $c_i(\varphi)$ находятся, как и в § 2, из l_1 условий компенсации невязок w_0 в выполнении граничных условий (6.4′):

$$\left.\frac{\partial^{k_1+r}(w_0+v_0)}{\partial \rho^{k_1+r}}\right|_{\rho=0} = \varepsilon^{-(k_1+r)} \left.\frac{\partial^{k_1+r}(w_0+v_0)}{\partial t^{k_1+r}}\right|_{t=0} = 0 \tag{6.17}$$
$$(r = 0, 1, \ldots, l_1 - 1).$$

Записав v_0 в виде

$$v_0 = \varepsilon^{k_1} \bar{v}_0 = \varepsilon^{k_1} \sum_{j=1}^{l_1} c_j \exp(-\lambda_j t), \tag{6.17′}$$

получим для определения $c_j = c_j(\varphi)$ систему уравнений, вытекающую из (6.17):

$$\frac{\partial^{k_1+r}\bar{v}_0}{\partial t^{k_1+r}}\Big|_{t=0} = -\varepsilon^{-k_1}\frac{\partial^{k_1+r}w_0}{\partial t^{k_1+r}}\Big|_{t=0} = -\varepsilon^{r}\frac{\partial^{k_1+r}w_0}{\partial \rho^{k_1+r}}\Big|_{\rho=0}$$
$$(r=0,\ 1,\ \ldots,\ l_1-1),$$

откуда

$$\sum_{j=0}^{l_1}(-\lambda_j)^{k_1+r}c_j = -\varepsilon^{r}\frac{\partial^{k_1+r}w_0}{\partial \rho^{k_1+r}}\Big|_{\rho=0}\quad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ l_1-1). \qquad (6.17'')$$

Система (6.17″) — такая же, как система (2.17) в § 2 (с той лишь разницей, что теперь $\lambda_i = \lambda_i(\varphi)$ — функции φ). Найденные из этой системы $c_i = c_i(\varphi)$ суть ограниченные и дифференцируемые до определенного порядка функции φ.

Далее, α_0 определяется в Q_η как многочлен (k_1-1)-й степени относительно ρ такой, что $w_0+v_0+\varepsilon\alpha_0$ удовлетворяет всем условиям (6.2′), (6.4′) (см. § 2), т. е.

$$\varepsilon\alpha_0(\rho,\ \varphi) = -\varepsilon^{k_1}\sum_{j=1}^{l_1}c_j(\varphi)\left(1-\frac{\lambda_j\rho}{\varepsilon}+\frac{\lambda_j^2\rho^2}{2!\,\varepsilon^2}-\ldots+(-1)^{k_1-1}\frac{(\lambda_j\rho)^{k_1-1}}{(k-1)!\,\varepsilon^{k_1-1}}\right).$$

Затем $\varepsilon\alpha_0$ заменяем функцией $\varepsilon\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)\alpha_0$, которую по-прежнему обозначаем через α_0.

Мы ищем решение u_ε задачи A_ε в виде (6.13)

$$u_\varepsilon = \left(w_0+\sum_{s=1}^{m}\varepsilon^s w_s\right)+\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^s(v_s+\varepsilon\alpha_s)+z_m,$$

и уравнение (6.3) записываем, пользуясь (6.9), в виде

$$h = L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv L_\varepsilon\left(w_0+\sum_{s=1}^{m}\varepsilon^s w_s+\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{s+1}\alpha_s\right)+L_\varepsilon\left(\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^s v_s\right)+L_\varepsilon z_m \equiv$$
$$\equiv\left\{\left(L_{2k_1}+\sum_{s=1}^{2l_1}\varepsilon^s L_{2k_1+s}\right)\left(\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s w_s+\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{s+1}\alpha_s\right)\right\}+$$
$$+\varepsilon^{-k_1}\left\{\left(M_0+\sum_{s=1}^{N+1}\varepsilon^s R_s\right)\left(\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^s\bar{v}_s\right)\right\}+L_\varepsilon z_m \qquad (6.18)$$

(здесь $v_s = \varepsilon^{k_1}\bar{v}_s$). Соединяя члены при ε^i $(0 < i \leqslant m)$ в первых фигурных скобках и приравнивая их нулю, получаем:

$$L_{2k_1}w_i = -\sum_{s=1}^{[i]}L_{2k_1+s}w_{i-s}-\sum_{s=0}^{[i]}L_{2k_1+s}\alpha_{i-s-1}, \qquad (6.19)$$
$$[i]=\min(i,\ 2l_1)\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

В качестве w_i берем решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (6.2′).

Аналогично, соединяя члены при одинаковых степенях ε^{i-k_1} во вторых фигурных скобках, получаем:

$$M_0\bar{v}_i = -\sum_{s=1}^{i} R_s\bar{v}_{i-s}. \tag{6.20}$$

Если w_{j-1}, α_{j-1}, $v_{j-1}=\varepsilon^{k_1}\bar{v}_{j-1}$ известны, то из (6.19) и из требования, чтобы w_i удовлетворяла граничным условиям (6.2′), находим w_i. Далее, находим $v_i=\varepsilon^{k_1}\bar{v}_i$ из уравнения (6.20) и из требования, что w_i+v_i удовлетворяет l_1 условиям (6.4′) и что $\bar{v}_i$ есть функция типа погранслоя. v_i находится так же, как в § 2, и имеет вид (6.17′), с той, однако, разницей, что коэффициенты при экспонентах суть многочлены от t; v_i, как и v_0, оказывается функцией типа погранслоя k_1-го порядка. α_i есть многочлен степени k_1-1 от ρ, такой, что $v_i+\varepsilon\alpha_i$ удовлетворяет условиям (6.2′). Следовательно,

$$w_i+v_i+\varepsilon\alpha_i \tag{6.21}$$

удовлетворяют всем граничным условиям (6.2′), (6.4′). При $i>m$ граничные условия для v_i заменяются требованием, чтобы v_i удовлетворяло однородным условиям (6.4′) (ср. § 2).

Далее, функцию α_i заменяем на $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)\alpha_i$, сохранив для новой функции прежнее обозначение.

Построив функции $w_i\,(i=0, 1, \ldots, m)$ и $\alpha_i\,(i=0, 1, \ldots, m-1)$, мы добьемся того (см. (6.19)), что в первых фигурных скобках формулы (6.18) уничтожатся все члены при $\varepsilon^s\,(0<s\leqslant m)$, т. е. останется выражение вида $h+O(\varepsilon^{m+1})$. Точно так же во вторых фигурных скобках, если построены v_i, $i\leqslant N$ (см. (6.20)), уничтожатся все члены при $\varepsilon^{s-k_1}\,(s\leqslant N)$ и останется выражение порядка ε^{N-k_1+1}. Если положить

$$N=m+k_1,$$

то в обеих фигурных скобках останутся лишь выражения порядка ε^{m+1}.

Доопределим теперь функции v_i, считая их равными нулю в $Q-Q_\eta$. Для того чтобы сделать эти функции гладкими в Q, умножим их в Q_η на сглаживающий множитель $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$. Функции v_i остались без изменения в полосе $0\leqslant\rho\leqslant\frac{\eta}{3}$. В полосе же $\frac{\eta}{3}\leqslant\rho\leqslant\eta$ экспоненты $\exp\left(-\lambda_i\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$, равно как и их производные любого порядка, будут величинами порядка выше ε^{m+1}. От умножения этих экспонент на функцию $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$ с ограниченными производными порядок их и их производных не понизится. Следовательно, в полосе $\frac{\eta}{3}\leqslant\rho\leqslant\eta$ $L_\varepsilon\left(\sum_{s=0}^{m+k_1}\varepsilon^s v_s\right)$ останется величиной порядка выше ε^{m+1}. В $Q-Q_\eta$ это выражение равно 0.

Итак,

$$\left.\begin{aligned} L_\varepsilon\Big(w_0+\sum_{s=1}^{m}\varepsilon^s w_s+\sum_{s=0}^{m+k_1}\varepsilon^{s+1}\alpha_s+\sum_{s=0}^{m+k_1}\varepsilon^s v_s\Big)=h+\varepsilon^{m+1}\bar g_m,\\ \|\bar g_m\|=O(1),\end{aligned}\right\}\tag{6.22}$$

где $\|\ \|$ — норма в некотором банаховом пространстве (см. § 7). Отсюда и из (6.18) следует:

$$L_\varepsilon z_m=\varepsilon^{m+1}g_m,\quad \|g_m\|=O(1)\quad (g_m=-\bar g_m).\tag{6.22'}$$

Так как u_ε и $w_i+v_i+\varepsilon\alpha_i$ удовлетворяют условиям (6.2′) и (6.4′), то и z_m удовлетворяет этим условиям ($w_i\equiv 0$ при $i>m$).

Из предположения о равномерной разрешимости задач A_ε следует:

$$\|z_m\|_2\leqslant O(\varepsilon^{m+1}).$$

Обозначая теперь

$$\varepsilon^{m+1}y_m=z_m+\sum_{s=m}^{m+k_1}\varepsilon^{s+1}\alpha_s,$$

получаем

$$\|y_m\|_2=O(1).$$

Если положить $\bar w_i=w_i+\alpha_{i-1}$, то (6.13) примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u_\varepsilon=w_0+\sum_{s=1}^{m}\varepsilon^s\bar w_s+\sum_{s=0}^{m+k_1}\varepsilon^s v_s+\varepsilon^{m+1}y_m,\\ \|y_m\|_2=O(1),\quad \|L_\varepsilon y_m\|=O(1).\end{aligned}\right\}\tag{6.23}$$

Функция $\bar w_i$ будет (в силу (6.19)) решением уравнения

$$L_{2k_1}\bar w_i=-\sum_{s=1}^{[i]}L_{2k_1+s}\bar w_{i-s}.\tag{6.19'}$$

Для того чтобы наш итерационный процесс можно было проводить, нужно, чтобы решения w_j уравнений (6.19) при граничных условиях (6.2′) были настолько гладкими, чтобы к ним можно было применять операторы, стоящие справа в (6.19), и чтобы граничные значения этих решений были настолько гладкими, чтобы к определяемым ими функциям v_j можно было применять операторы из правой части (6.20).

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема 10. *При условиях I — IV решение u_ε задачи A_ε* (6.3′), (6.2′), (6.4′) *допускает асимптотическое представление*:

$$u_\varepsilon=w_0+\sum_{s=1}^{m}\varepsilon^s\bar w_s+\sum_{s=0}^{m+k_1}\varepsilon^s v_s+\varepsilon^{m+1}y_m,\tag{6.23'}$$

где w_0 — решение вырожденной задачи A_0 (6.1′), (6.2′), $\bar w_i=w_i+\alpha_{i-1}$, *$w_i$ — решения уравнения* (6.19) *при граничных условиях* (6.2′), $v_s=\varepsilon^k\bar v_s$ — *функции типа погранслоя, получаемые как решения обыкновенных дифференциальных уравнений* (6.16) *и* (6.20) *с постоянными относительно t коэффициентами при соответствующих граничных условиях, а для невязки $\varepsilon^{m+1}y_m$ имеем*:

$$\varepsilon^{m+1}\|y_m\|_2=\varepsilon^{m+1}O(1),\quad \|L_\varepsilon y_m\|=O(1).$$

3. Общий случай. Вернемся к общему случаю, рассмотренному в начале параграфа.

Мы считаем, что граница Γ разбита на части $\Gamma_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$, в окрестности каждой из которых введены соответствующие системы координат $(\rho,\ \varphi)\ (\varphi(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{n-1}))$, при этом:

1) Каждое Γ_i удовлетворяет соответствующим условиям гладкости; $(n-2)$-мерное множество $\mathfrak{D}$, разделяющее эти части, тоже кусочно-гладкое.

2) На каждом куске Γ_i заданы k_i условий (6.2) задачи A_0 и l_i дополнительных условий (6.4) задачи A_ε.

3) На каждом из кусков Γ_i для точек φ, внутренних к Γ_i, коэффициенты $a_k(\varphi)$ и $a_{k+l}(\varphi)$ главных частей операторов L_k и L_{k+l}, записанных в координатах $(\rho,\ \varphi)$, при старших производных по трансверсальному направлению ρ сохраняют постоянный знак.

Предполагая 1) разрешимость задачи A_0, 2) достаточную гладкость полученных решений (вне $\mathfrak{D}$) и 3) регулярность вырождения задачи A_ε в задачу A_0, можно строить, так же, как это сделано в § 2 и в п. 2 настоящего параграфа, последовательность функций $w_i,\ v_i,\ \alpha_i$. При этом w_0 — решение задачи A_0: $L_k w_0=h$ при условиях (6.2); v_0 — решение типа погранслоя уравнения $M_0 v_0=0$, компенсирующее невязки в выполнении условий (6.4) у w_0, т. е. v_0+w_0 удовлетворяет условиям (6.4). Условие регулярности обеспечивает возможность построения v_0. Как и выше, устанавливается, что v_0 является функцией типа погранслоя k_i-го порядка в окрестности $\Gamma_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$; α_0 — многочлен порядка k_i-1 в окрестности Γ_i, такой, что $v_0+w_0+\varepsilon\alpha_0$ удовлетворяет условиям (6.2) и (6.4). Далее, повторяя итерационный процесс, описанный выше, находим последовательно $w_i,\ v_i,\ \alpha_i$. Функции $v_i,\ \alpha_i$ определяются независимо в окрестностях разных кусков Γ_i.

В окрестности $\mathfrak{D}$ асимптотику u_ε приходится, как правило, исследовать дополнительно (см. теорему 7 §§ 4, 5), так как на $\mathfrak{D}$ могут появиться особенности. Вне этой окрестности построенные функции v_i и α_i доопределяются, как в п. 2 настоящего параграфа, с помощью сглаживающих функций $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$. Мы полагаем, что вне любой окрестности $V(\mathfrak{D})$ разделяющего множества $\mathfrak{D}$ итерационный процесс проходит. Полагая, как в § 2, $N=m+\max\limits_i(k-k_i)$, получим так же, как в п. 2, если z_m — невязка:

$$z_m=\varepsilon^{m+1}y_m=u_\varepsilon-\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s w_s-\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^s v_s-\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{s+1}\alpha_s,$$

$$\|L_\varepsilon y_m\|'=O(1); \tag{6.24}$$

через $\|\ \ \|'$ обозначена некоторая банахова норма функций в области $Q-V(\mathfrak{D})$. Лишь при дополнительных условиях, как мы видели в § 4, можно норму $\|\ \ \|'$ заменить в (6.24) нормой, взятой по Q. Если для задач A_ε выполняется условие равномерной разрешимости, то из (6.24) при определенных условиях можно заключить, что $\|z_m\|_2'=\|\varepsilon^{m+1}y_m\|_2'=O(\varepsilon^{m+1})$, где $\|\ \ \|_2'$ — норма, вообще говоря, другая, чем норма $\|\ \ \|'$, но также взятая по подобласти $Q-V(\mathfrak{D})$. В этом смысле окажется тогда справедливой и теорема 10 (см. § 8).

4. Погранслой, определяемый уравнением в частных производных. В ряде случаев, как мы уже видели (§ 4, п. 5), на одной из частей границы Γ_i $a_{k+l}(\varphi) \equiv 0$ или $a_k(\varphi) \equiv 0$. Это означает, что Γ_i есть характеристическое многообразие для оператора L_{k+l} или L_k. В качестве главной части M_0 оператора L_ε, записанного в координатах (ρ, φ) вблизи Γ_i, при расщеплении типа (6.9) мы уже в этом случае не получим, вообще говоря, обыкновенного дифференциального оператора по трансверсальному направлению. В оператор M_0 могут входить и члены, содержащие дифференцирование по φ_i (см. § 4 и ниже § 8). Таким образом, уравнение $M_0 v_0 = 0$ и аналогичные уравнения для определения v_s (в окрестности Γ_i) могут превратиться в уравнения в частных производных, но в более простые, чем исходное уравнение. Регулярность вырождения при этом означает, что краевая задача для уравнения $M_0 v_0 = 0$, связанная с погашением невязок w_0 в граничных условиях на Γ_i, имеет решение типа пограничного слоя. В настоящей статье мы не даем общего анализа регулярных вырождений такого рода. В § 8 мы решим ряд задач с погранслоями, определяемыми уравнениями в частных производных.

5. Явления внутреннего пограничного слоя. Как указано было во введении, явления типа погранслоя возникают не только вблизи границы Γ области Q, но и внутри Q. Это имеет место в том случае, когда решение предельной задачи A_0 имеет вдоль некоторого многообразия $\mathfrak{D}$ разрыв или разрыв своих производных, отсутствующий у решений допредельной задачи. Проиллюстрируем это явление на конкретном примере. Задача A_ε состоит в решении уравнения

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon - u_\varepsilon = h(x, y) \tag{6.25}$$

при граничном условии

$$u|_\Gamma = 0. \tag{6.26}$$

Предельная задача A_0 есть решение уравнения

$$L_0 w_0 \equiv -w_0 = h(x, y), \tag{6.27}$$

т. е. $w_0 = -h(x, y)$. Пусть $h(x, y)$ кусочно-гладкая функция, имеющая разрыв первого рода только вдоль отрезка CD прямой $y = 0$. Для простоты будем считать CD лежащим строго внутри Q. Поскольку u_ε непрерывно дифференцируемо в $\overline{Q}$, то $u_\varepsilon - w_0$ терпит разрыв вместе с производными первого порядка на отрезке CD. Поэтому в асимптотике u_ε должен, кроме w_0, еще фигурировать член $\eta_\varepsilon(x, y)$, компенсирующий разрыв w_0 и ее производных. Будем искать η_ε в виде: при $y > 0$ $\eta_\varepsilon = \varphi(x) e^{-\frac{y}{\varepsilon}}$, при $y < 0$ $\eta_\varepsilon = \psi(x) e^{\frac{y}{\varepsilon}}$ [1]), где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определим ниже. Введем обозначение

$$[F] = F(x, +0) - F(x, -0).$$

[1]) Отметим, что η_ε—функция типа погранслоя, найденная при $y > 0$ и $y < 0$ как решение обыкновенного уравнения $M_0 v \equiv \frac{d^2 v}{dt^2} - v \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2 v}{dy^2} - v = 0$ $\left(\frac{y}{\varepsilon} = t\right)$, являющегося главной частью (6.25) в разложении вида (6.9′).

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определим из условия: функция $w_0+\eta_\varepsilon$ непрерывна и гладка в Q, т. е.

$$[w_0+\eta_\varepsilon]=\left[\frac{\partial}{\partial y}(w_0+\eta_\varepsilon)\right]=0.$$

Отсюда следует:

$$-[w_0]=\varphi(x)-\psi(x),$$
$$-\left[\frac{\partial w_0}{\partial y}\right]=-\frac{1}{\varepsilon}(\varphi(x)+\psi(x)),$$

т. е.

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\left[w_0-\varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial y}\right],\quad \psi(x)=\frac{1}{2}\left[w_0+\varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial y}\right].$$

Обозначим

$$\tilde{w}=w_0+\eta_\varepsilon+v_\varepsilon,$$

где v_ε — функция типа погранслоя вблизи Γ, компенсирующая невязку в выполнении граничного условия (6.26) функцией $w_0+\eta_\varepsilon$, т. е. $v_\varepsilon|_\Gamma=-(w_0+\eta_\varepsilon)|_\Gamma$, причем $L_\varepsilon v_\varepsilon=O(\varepsilon^2)$. Функция $\tilde{w}$ непрерывно дифференцируема в Q, причем вне CD:

$$L_\varepsilon\tilde{w}=L_\varepsilon(w_0+\eta_\varepsilon+v_\varepsilon)=\{L_\varepsilon w_0\}+\{L_\varepsilon\eta_\varepsilon\}+L_\varepsilon v_\varepsilon=$$
$$=\varepsilon^2\{\Delta w_0\}-w_0+\varepsilon^2\left\{\frac{\partial^2\eta_\varepsilon}{\partial y^2}\right\}-\eta_\varepsilon+\varepsilon^2\frac{\partial^2\eta_\varepsilon}{\partial x^2}+L_\varepsilon v_\varepsilon=h(x,y)+O(\varepsilon^2),$$

где $\{\ \}$ означает значение соответствующего выражения в классическом смысле (т. е. без учета δ-функций на CD). Если через z_ε обозначить остаточный член:

$$z_\varepsilon=u_\varepsilon-(w_0+\eta_\varepsilon+v_\varepsilon),$$

то

$$L_\varepsilon z_\varepsilon=O(\varepsilon^2),$$

причем на границе Γ $z_\varepsilon=0$. Отсюда

$$\|z_\varepsilon\|+\varepsilon\|D^1z_\varepsilon\|+\varepsilon^2\|D^2z_\varepsilon\|=O(\varepsilon^2)$$

(нормы берутся в $\mathscr{L}_2$).

С помощью итерационного процесса можно получить более далеко идущую асимптотику.

Это построение имеет общий характер и может быть использовано для уравнений других типов и для уравнений высших порядков. Заметим, что в некоторых случаях могут появляться явления внутреннего параболического пограничного слоя.

§ 7. Регулярное вырождение эллиптических операторов высшего порядка в эллиптические

1. Вернемся теперь к рассмотренному частично в предыдущем параграфе вопросу о вырождении первой краевой задачи для эллиптического уравнения

$$L_\varepsilon u\equiv L_{2k_1}u+\sum_{s=1}^{2l_1}\varepsilon^sL_{2k_1+s}u=h \qquad (7.1)$$

при условиях (6.2′), (6.4′) (задача A_ε) в первую краевую задачу для эллиптического уравнения

$$L_{2k_1}u = h \tag{7.2}$$

при условиях (6.2′) (задача A_0).

По аналогии с § 3 введем обобщенную характеристическую форму

$$\pi_\varepsilon(\xi;\, x) \equiv \sum_{s=0}^{2l_1}{}' \varepsilon^s \pi_{2k_1+s}(\xi;\, x), \tag{7.3}$$

где $\pi_j(\xi;\, x)$ есть характеристическая форма оператора L_j в точке x; $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. $\pi_j(\xi;\, x)$ получается заменой в L_j всякого члена старшего порядка j $a_{i_1 \ldots i_n}(x) \dfrac{\partial^j}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$ выражением $a_{i_1 \ldots i_n}(x)(i\xi_1)^{i_1} \ldots (i\xi_n)^{i_n}$.

Основная теорема об асимптотике для нашей задачи доказана в § 6 в предположениях: а) разрешимости задач A_0, б) регулярности вырождения задачи A_ε в задачу A_0, в) равномерной разрешимости задач A_ε, г) достаточной гладкости решений этих задач.

Отметим, что для задачи A_0 достаточным условием разрешимости (и единственности) является позитивность соответствующей квадратичной формы оператора L_{2k_1}: $(L_{2k_1}w,\, w) \geqslant \alpha^2(w,\, w)$, где w удовлетворяет условиям (6.2′), а достаточным условием равномерной резрешимости задач A_ε является выполнение такого же условия: $(L_\varepsilon u,\, u) \geqslant \alpha^2(u,\, u)$ для всех достаточно малых ε, где α^2 не зависит от u и ε (условие равномерной позитивности), а u удовлетворяет условиям (6.2′), (6.4′) (см. [49]).

Ниже приводим достаточные условия равномерной позитивности, а значит, равномерной разрешимости задач A_ε (для одномерного случая соответствующая теорема доказана в § 3).

Сейчас мы приведем достаточные условия регулярности вырождения задачи A_ε в задачу A_0, именно:

Лемма 8. *Для регулярности вырождения задачи A_ε в задачу A_0 достаточно, чтобы вещественная часть обобщенной характеристической формы была положительна, точнее:*

$$\operatorname{Re} \pi_\varepsilon(\xi;\, x_0) \equiv \sum_{j=0}^{l_1}{}' \varepsilon^{2j} \pi_{2(k_1+j)}(\xi;\, x_0) \geqslant C \sum_{j=0}^{l_1}{}' \varepsilon^{2j} |\xi|^{2(k_1+j)}, \tag{7.4}$$

где C не зависит от x_0, x_0 — любая точка границы Γ.

Доказательство. Как и в § 6, введем в окрестности границы систему координат $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \rho)$ и сохраним прежние обозначения для операторов L_ε, L_{2k_1+s} и форм π_ε и π_{2k_1+s}, записанных в новых координатах; $x_0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_{n-1}^0;\, 0)$. Очевидно, условие (7.4) инвариантно по отношению к замене координат. Пусть координата ξ_n отвечает ρ, а ξ_i при $i < n$ отвечают φ_i. Полагаем в π_ε $\xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = 0$, другими словами, мы в каждой форме π_{2k_1+s} сохраняем лишь член $a_{2k_1+s}(\varphi^0)(i\xi_n)^{2k_1+s}$, $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_{n-1}^0, 0)$, который отвечает члену $\varepsilon^s a_{2k_1+s}(\varphi^0) \dfrac{\partial^{2k_1+s}}{\partial \rho^{2k_1+s}}$ оператора L_{2k_1+s}. Следовательно,

$$\pi_\varepsilon(0, \ldots, 0, \xi_n; x_0) = \sum_{s=0}^{2l_1}{}' \varepsilon^s a_{2k_1+s}(\varphi^0)(i\xi_n)^{2k_1+s}. \tag{7.5}$$

Для введенного в § 6 дифференциального оператора $M_0 v = \sum_{s=0}^{2l_1} a_{2k_1+s}(\varphi) \frac{\partial^{2k_1+s} v}{\partial t^{2k_1+s}}$ характеристический многочлен $P_{2(k_1+l_1)}(\lambda)$ имеет вид (6.11'):

$$P_{2(k_1+l_1)}(\lambda) \equiv \lambda^{2k_1} Q_\varphi(\lambda) = \sum_{s=0}^{2l_1}{}' a_{2k_1+s}(\varphi)\lambda^{2k_1+s}. \tag{7.6}$$

Отсюда видно, что

$$\pi_\varepsilon(0, \ldots, 0, \xi_n; x_0) = \varepsilon^{-2k_1} P_{\varphi_0}(i\varepsilon\xi_n), \tag{7.7}$$

где P_{φ_0} есть $P_{2(k_1+l_1)}(\lambda)$ в точке φ_0. Условие (7.4) позитивности дает:

$$\operatorname{Re}\pi_\varepsilon(0, \ldots, 0, \xi_n; x_0) \geqslant C \sum_{j=0}^{l_1}{}' \varepsilon^{2j} |\xi|^{2(k_1+j)}.$$

Отсюда и из (7.7) следует, что на мнимой оси характеристический многочлен $P_{2(k_1+l_1)}(\lambda)$ имеет положительную вещественную часть. А это, согласно лемме 4 § 3, означает, что многочлен $Q_\varphi(\lambda)$ имеет l_1 корней в левой полуплоскости, т. е. ровно столько, сколько граничных условий выпадает при переходе от задачи A_ε к задаче A_0; следовательно, имеет место регулярное вырождение.

Замечание. По существу мы использовали лишь позитивность $\operatorname{Re}\pi_\varepsilon(0, \ldots, 0, \xi; x_0)$. Условие (7.4) означает, что регулярность вырождения задачи A_ε в задачу A_0 будет обнаруживаться при любом выборе трансверсального направления ρ.

Условия же равномерной разрешимости несколько более стеснительны, именно, имеет место

Лемма 9. *Если задача A_0 позитивна, точнее*

$$(L_{2k_1}w, w) \geqslant \beta^2 \left(\sum (D^{k_1}w, D^{k_1}w) + (w, w)\right)^{1)} \tag{7.8}$$

для любой гладкой функции w, удовлетворяющей условиям (6.2'), *и форма*

$$\tilde{\pi}_\varepsilon(\xi; x) = \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \pi_{2(k_1+j)}(\xi; x) \geqslant \alpha^2 \sum_{j=1}^{l_1}{}' \varepsilon^{2j} |\xi|^{2(j+k_1)}, \tag{7.9}$$

где α^2 не зависит от ξ и x, то операторы A_ε равномерно позитивны, причем имеет место следующее энергетическое неравенство:

$$\sum_{|j|=1}^{l_1} \sum_{|k_1|=k_1} \varepsilon^{2j} \| D^{(k_1+j)}u \|^2 + \sum_{|i|=0}^{k_1}{}' \| D^{(i)}u \|^2 \leqslant C_1 (L_\varepsilon u, u) \leqslant C_2 \| h \|^{2\,2)} \tag{7.10}$$

для любых функций u, удовлетворяющих условиям (6.2'), (6.4'); $h = L_\varepsilon u$.

Доказательство этой леммы приведено в конце параграфа.

---

1) Отметим, что достаточно потребовать лишь выполнения неравенства $(L_{2k_1}w, w) \geqslant \gamma^2(w, w)$; из него уже следует (7.8), если L_{2k_1} — равномерно по x эллиптический оператор.

2) В правой части (7.10) можно норму $\| \;\|$ заменить нормой $\| \;\|_{-k_1}$ с отрицательным индексом $-k_1$ (см. [50]).

Следствие. При условиях леммы 9 имеет место: а) разрешимость задачи A_0 (это вытекает из условия (7.8) леммы 9); б) равномерная разрешимость задач A_ε (это вытекает из равномерной позитивности операторов L_ε в силу (7.10)); в) регулярность вырождения задачи A_ε в задачу A_0.

В самом деле, из эллиптичности оператора L_{2k_1} и (7.8) вытекает положительность формы $\pi_{2k_1}(\xi;\ x) \geqslant \alpha^2 |\xi|^{2k_1}$. Отсюда и из (7.9) вытекает (7.4), т. е., согласно лемме 8, регулярность вырождения.

Итак, итерационный процесс, приведший к теореме 10, пройдет, если решения задачи A_0 будут настолько гладкими, чтобы к ним можно было применять операторы, фигурирующие в формуле (6.19). Это уже обеспечит возможность построения функций v_i (см. (6.20)).

Для того чтобы имела место асимптотика (6.23), а также для того чтобы можно было (6.23) почленно p раз дифференцировать, оказывается достаточным потребовать, чтобы правая часть h принадлежала $W_2^{(\sigma)}$, $\sigma = m + p + l_1$ и чтобы достаточно гладкими были коэффициенты и граница[1]). Сейчас уже не возникает трудностей с точками касания характеристик с Γ, так как действительных характеристик в нашем случае нет.

Теорема 11. *Пусть вещественная часть обобщенной характеристической формы $\pi_\varepsilon(\xi;\ x)$ оператора L_ε положительна, т. е. выполнено (7.4), оператор L_{2k_1} при граничных условиях (6.2′) позитивен в смысле (7.8), параметры задачи A_ε — достаточно гладкие, $h \in W_2^{(\sigma)}$, $\sigma = m + p + l_1$, $p \geqslant 2l_1$.*

Тогда имеет место следующая асимптотика для решения u_ε задачи A_ε:

$$u_\varepsilon = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s w_s + \sum_{s=0}^{m+k_1} \varepsilon^{s+1} \alpha_s + \sum_{r=0}^{m+k_1} \varepsilon^r v_r + z_m, \tag{7.11}$$

причем эту формулу можно p раз дифференцировать. Для невязки z_m имеют место следующие оценки:

$$\sum_{|i|=1}^{2k_1} \| D^{(i)} z_m \| + \| z_m \| = O(\varepsilon^{m+1}), \quad \| D^{(2k_1+j)} z_m \| = O(\varepsilon^{m+1-j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant p), \tag{7.12}$$

точнее во внутренней подобласти Q', $\overline{Q'} \subset Q$,

$$\| D^{(2k_1+i)} z_m \|_{Q'} = O(\varepsilon^{m+1}), \qquad |i| \leqslant p, \tag{7.13}$$

а в граничной полоске $U(\Gamma)$:

$$\| D^{(2k_1+j)} z_m \|_{U(\Gamma)} = O(\varepsilon^{m+1-j}) \qquad (1 \leqslant |j| \leqslant p). \tag{7.14}$$

Примером такого вырождения, когда выполняются условия теоремы 11, может служить вырождение уравнения пластины вида $\varepsilon^2 \Delta^2 u - \Delta u = h$ при

---

[1]) Действительно, согласно уравнениям (6.19), из которых последовательно определяются функции w_i, при указанной гладкости h функция w_0 принадлежит $W_2^{(\sigma)}$, где $\sigma = m + p + l_1 + 2k_1$, функция v_0, определяемая из (6.16) при условиях (6.17), принадлежит $W_2^{(\sigma_1)}$, где $\sigma_1 = m + p \times k_1$, а функция α_0 также принадлежит $W_2^{(\sigma_1)}$. Из (6.19), (6.20) видно, что каждая следующая итерация понижает гладкость соответствующих функций на единицу. Поэтому суммы в (7.11) (см. ниже) допускают производные до p-го порядка.

граничных условиях закрепления: $u\Big|_{\Gamma}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0$, в уравнение мембраны $-\Delta w=h$ при условии $w|_{\Gamma}=0$.

2. Доказательство леммы 9. Сначала установим неравенство (7.10) для гладких функций u, обращающихся в нуль в граничной полоске. Как и в § 3, основное место занимает вывод оценки

$$(\Lambda_\varepsilon u, u)\geqslant\beta^2\sum_{|j|=1}^{l_1}\sum_{|k_1|=k_1}\varepsilon^{2j}\|D^{(k_1+j)}u\|^2-M\varepsilon\Big(\sum_{|k_1|=k_1}\|D^{(k_1)}u\|^2+\|u\|^2\Big)\qquad(7.15)$$

(ср. с (3.12)), где $\Lambda_\varepsilon=\sum_{i=1}^{l_1}\varepsilon^{2i}L_{2(k_1+i)}$, $(j)=(j_1,\ldots,j_n)$, $|j|=j_1+\ldots+j_n$.

В случае постоянных коэффициентов и когда $L_{2(k_1+i)}$ состоят лишь из членов порядка $2(k_1+i)$ (7.15) устанавливается, как и при доказательстве леммы 2, с помощью применения преобразования Фурье:

$$\tilde{u}(\xi)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int u(x)\,e^{-i\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\xi_j}\,dx.\qquad(7.16)$$

В случае переменных коэффициентов применяется та же методика, которой мы пользовались в § 3 (для случая эллиптических операторов, не содержащих параметры, она применялась в [29], [23], [26] и в других работах). Сначала для функций w, отличных от нуля лишь в достаточно малой подобласти $Q_1\subset Q$, устанавливаем (7.15), применяя выкладки, аналогичные (3.13), (3.14), ..., (3.18′); δ — диаметр области Q_1. Далее, пользуясь разложением единицы $1\equiv\sum_{i=1}^{N}\zeta_i(x)$, $x\in Q$, причем диаметр δ_i носителя $\zeta_i(x)$ не превосходит δ, и, применяя выкладки, аналогичные (3.19) — (3.20′), получим (7.15). Отсюда, как и в § 3, выводим (7.10). Далее, точно так же, как в замечании на стр. 44, убеждаемся в справедливости (7.10) для любых достаточно гладких функций u, удовлетворяющих условиям (6.2′), (6.4′), откуда и вытекает равномерная позитивность, а значит, и равномерная разрешимость задач A_ε.

Замечание. В силу теорем, доказанных О. В. Гусевой [44] (см. также работы Ниренберг [45], [48]), если $h\in W_2^{(\tau)}$, то решение 1-й краевой задачи (7.1), (6.2′), (6.4′) принадлежит $W_2^{(2(k_1+l_1)+\tau)}$.

Доказательство теоремы 11. Оно проводится аналогично доказательству теоремы 6 (§ 4 и § 5). Мы его проведем, не останавливаясь на всех подробностях.

Так как невязка z_m удовлетворяет уравнению (6.22′), то согласно энергетическому неравенству (7.10) выводим, полагая всюду ниже $z_m=z$,

$$\left.\begin{aligned}&\|z\|_\varepsilon^2\equiv\sum_{|j|=0}^{l_1}\sum_{|k_1|=k_1}\varepsilon^{2|j|}\|D^{(j+k_1)}z\|^2+\sum_{|i|=1}^{k_1-1}\|D^{(i)}z\|^2+\|z\|^2\leqslant C\varepsilon^{2(m+1)}\|g_m\|^2,\\&\|g_m\|=O(1).\end{aligned}\right\}\qquad(7.17)$$

Отсюда сразу вытекают оценки:

$$\| z \| + \sum_{|i|=1}^{k_1} \| D^{(i)} z \| \leqslant C_1 \varepsilon^{m+1}, \quad \| D^{(k+j)} z \| \leqslant C_1 \varepsilon^{m+1-|j|} \quad (|j| \leqslant l_1). \qquad (7.18)$$

Далее легко оценить внутри области невязку z и ее производные. Пусть $\zeta(x)$ — гладкая функция, обращающаяся в нуль в граничной полоске Q_η и равна 1 вне $Q_{2\eta}$. Тогда

$$L_\varepsilon(\zeta z) = \zeta \varepsilon^{m+1} g_m + L'_\varepsilon z, \qquad (7.19)$$

где L'_ε — оператор порядка $2(k_1 + l_1) - 1$, в коэффициенты которого входят производные от ζ и соответствующие степени ε. Применяя к обеим частям (7.19) оператор дифференцирования D по одной из переменных, мы получим:

$$L_\varepsilon(D(\zeta z)) = \varepsilon^{m+1} D(\zeta g_m) + L''_\varepsilon z, \qquad (7.20)$$

где L''_ε — оператор порядка $2(k_1 + l_1)$. Умножая обе части (7.20) скалярно на $D(\zeta z)$, применяя к левой части энергетическое неравенство (7.10), а скалярные произведения, стоящие справа, оценивая (после соответствующего интегрирования по частям), как мы это уже неоднократно делали (см. § 5 п. 1, 2), получим:

$$\| D(\zeta z) \|_\varepsilon^2 \leqslant C_1 (\varepsilon^{2(m+1)} \| \zeta g_m \|^2 + \| z \|_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \| D(\zeta z) \|_\varepsilon^2, \qquad (7.21)$$

откуда, пользуясь (7.17), получим:

$$\| D(\zeta z) \|_\varepsilon = O(\varepsilon^{m+1}) \text{ и } \| Dz \|_{\varepsilon, Q - Q_{2\eta}} = O(\varepsilon^{m+1}), \qquad (7.22)$$

так как $\zeta \equiv 1$ в $Q - Q_{2\eta}$. Аналогично, дифференцируя последовательно (7.19), мы получим:

$$\sum_{|j|=1}^{l_1} \sum_{|k_1|=k_1} \varepsilon^{2j} \| D^{(j+2k_1)} z \|_{Q'}^2 + \sum_{|i|=0}^{2k_1} \| D^{(i)} z \|_{Q'}^2 \leqslant C \varepsilon^{2(m+1)} \| g_m \|^2 = O(\varepsilon^{2(m+1)}) \qquad (7.23)$$

и, далее дифференцируя (7.19), получим:

$$\| D^{(2k_1+i)} z \|_{Q'} \leqslant \varepsilon^{m+1} \sum_{|s|=0}^{|i|} \| D^{(s)} g_m \|_{Q''} = O(\varepsilon^{m+1}), \quad |i| \leqslant p, \qquad (7.24)$$

где $\overline{Q'} \subset Q''$, $\overline{Q''} \subset Q$. При этом мы воспользовались тем, что во внутренней подобласти Q'' при достаточно малых ε погранслои v_i вместе с производными имеют любой порядок малости, и следовательно, $\| D^{(s)} g_m \|_{Q''} = O(1)$.

Замечание. Точно так же, как в замечании на стр. 95, с помощью процесса замыкания убеждаемся в том, что для справедливости оценок (7.23) и (7.24) достаточно, чтобы функция g_m допускала лишь те производные, которые выписаны справа в (7.24). (При выводе мы пользовались большим числом производных.)

Для полного доказательства теоремы 11 необходимо еще доказать оценки (7.14) в граничной полоске области Q. Это можно сделать аналогично тому, как в доказательстве теоремы 4.

Пусть $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ — локальная система координат вблизи некоторой точки $P_0 \in \Gamma$, $\psi = \psi\left(\frac{\rho}{\delta}\right) \prod_{i=1}^{n-1} \psi\left(\frac{|\varphi_i - \varphi_i^0|}{\delta}\right)$, $P = P_0\ (0, \varphi_i^0)$.

Очевидно, для ψz имеет место формула (7.19) ($\psi \longleftrightarrow \zeta$), которую запишем сейчас в следующем виде:

$$\mathscr{L}_\varepsilon(\psi z) \equiv \sum_{j=0}^{2l_1} \varepsilon^j \mathscr{L}_{2k_1+j}(\psi z) + M\psi z = \psi\varepsilon^{m+1} g_m + L'_\varepsilon z + (\mathscr{L}_\varepsilon - L_\varepsilon)(\psi z) + M\psi z = H, \tag{7.25}$$

где оператор $\mathscr{L}_{2k_1+j}$ совпадает с главной частью[1]) оператора L_{2k_1+j}, записанной в координатах (ρ, φ_i), в которой коэффициенты заменены постоянными, равными значениям этих коэффициентов в точке $(0, (\varphi_i^0)$ $M = \mathrm{const}$, $M > 0$. Обозначим $\psi z = z_1$, продолжим эту функцию нулем при $\rho > \delta$, $|\varphi_i - \varphi_i^0| > \delta$, и пусть

$$Z_1(\rho, \xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int z_1(\rho, \varphi)\, e^{-i(\varphi_1\xi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}\xi_{n-1})}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}$$

есть преобразование Фурье z_1 по переменным $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Применяя к обеим частям (7.25) преобразование Фурье по φ, мы получим обыкновенное уравнение

$$\widetilde{\mathscr{L}_\varepsilon(z_1)} \equiv \sum_{j=0}^{2l_1} \varepsilon^j \pi_{2k_1+j}^0\left(-i\frac{d}{d\rho}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\right) Z_1 + MZ_1 = \widetilde{H}, \tag{7.26}$$

где $\pi_{2k_1+j}^0(\xi)$ — характеристическая форма оператора $\mathscr{L}_{2k_1+j}$, причем вместо переменной ξ_n (отвечающей дифференцированию по ρ) подставлен оператор $-i\frac{d}{d\rho}$. Уравнение (7.26) является обыкновенным дифференциальным уравнением по ρ порядка $2(k_1 + l_1)$ с полиномиальными коэффициентами от $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, причем его решение Z_1 удовлетворяет граничным условиям

$$Z_1|_{\rho=0} = \ldots = \left.\frac{d^{k_1+l_1-1} Z_1}{d\rho^{k_1+l_1-1}}\right|_{\rho=0} = 0, \quad Z_1|_{\rho\geqslant\delta} = \ldots = \left.\frac{d^{k_1+l_1-1} Z_1}{d\rho^{k_1+l-1}}\right|_{\rho\geqslant\delta} = 0. \tag{7.27}$$

Пользуясь тем, что характеристическая обобщенная форма $\pi_\varepsilon(\xi, P_0)$ оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ положительно определенная и $M > 0$, легко убеждаемся в позитивности оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ и в равномерной разрешимости задачи (7.26), (7.27). Представив ее решение Z_1 через $\widetilde{H}$ с помощью функции Грина и оценивая асимптотически корни характеристического уравнения для (7.26), найдем:

$$\sum_{j=0}^{2l_1} \varepsilon^{2j} \left(\left\| \frac{\partial^{2k_1+j} Z_1}{\partial\rho^{2k_1+j}} \right\|^2 + |\xi|^2 \left\| \frac{\partial^{2k_1+j-1} Z_1}{\partial\rho^{2k_1+j-1}} \right\|^2 + \ldots + |\xi|^{2(2k_1+j)} \| Z_1 \|^2 \right) + \\ + \| Z_1 \|^2 \leqslant C \| \widetilde{H} \|^2, \tag{7.27'}$$

причем нормы в (7.27′) берутся лишь по ρ; $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2$, C — константа, не зависящая от ε, ξ, Z_1, P_0. Интегрируя обе части (7.27′) по ξ_i

[1]) Т. е. с суммой членов старшего порядка.

от $-\infty$ до $+\infty$ и пользуясь равенством Парсеваля, получим:

$$|||z_1|||_\varepsilon^2 \equiv \sum_{|i|=0}^{2l_1} \sum_{|k_1|=k_1} \varepsilon^{2|i|} \| D^{(2k_1+i)} z_1 \|^2 + \| z_1 \|^2 \leqslant C \| H \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant C_1 [\varepsilon^{2(m+1)} \| \psi g_m \|^2 + \| L'_\varepsilon z \|^2 + \| (\mathscr{L}_\varepsilon - L_\varepsilon) z_1 \|^2]. \quad (7.28)$$

Коэффициенты оператора $\mathscr{L}_\varepsilon - L_\varepsilon$, стоящие при производных, входящих в $\mathscr{L}_\varepsilon$, имеют вид $a(P_0) - a(P)$. Взяв δ достаточно малым, мы можем их сделать сколь угодно малыми, и, следовательно, мы сможем из (7.28) получить

$$|||z_1|||_\varepsilon^2 \leqslant C_2 (\varepsilon^{2(m+1)} \| \psi g_m \|^2 + \| L'_\varepsilon z \|^2 + \| L''_\varepsilon z_1 \|^2), \quad (7.29)$$

где L''_ε — оператор, в который входят «неглавные» («подчиненные») члены оператора L_ε [1]). Далее, аналогично тому, как мы это делали в § 5, представляем функцию, равную 1 в Q в виде суммы $1 \equiv \sum_{i=0}^{N} \zeta_i(x)$, где $\zeta_i(x)\,(i>0)$ имеют носитель диаметра $\leqslant \delta$, прилегающий к Γ, а $\zeta_0(x)$ имеет носитель внутри Q. Для каждой из функций $z_i = \zeta_i z$ имеет место (7.29), а для $\zeta_0 z$, как мы уже доказали, имеет место (7.12), (7.13). Отсюда находим:

$$|||z|||_\varepsilon^2 = \Big|\Big|\Big| \Big(\sum_{i=0}^{N} \zeta_i(x)\Big) z \Big|\Big|\Big|_\varepsilon^2 \leqslant C_3 \Big(\varepsilon^{2(m+1)} \| g_m \|^2 + \sum_{i>0} (\| L'_\varepsilon z \|^2 + \| L''_\varepsilon z_i \|^2)\Big) \quad (7.30)$$

(ζ_i входят также в коэффициенты L'_ε). Далее имеем:

$$\sum_{i>0} (\| L'_\varepsilon z \|^2 + \| L''_\varepsilon z_i \|^2) \leqslant C_4 \varepsilon |||z|||_\varepsilon^2 + C_4 \sum_{|j|=0}^{2k_1-1} \| D^{(j)} z \|^2 . \quad (7.31)$$

Последнюю сумму оценим следующим образом

$$\sum_{|j|=0}^{2k_1-1} \| D^{(j)} z \|^2 \leqslant \delta^2 \sum_{|(k_1)|=k_1} \| D^{(2k_1)} z \|^2 + M^2 \| z \|^2, \quad (7.31')$$

причем δ можно взять сколь угодно малым, если M достаточно большое (см. [26]). Из (7.30), (7.31) и (7.31′) при достаточно малом ε и δ выводим:

$$|||z|||_\varepsilon^2 \leqslant C_5 \left(\varepsilon^{2(m+1)} \| g_m \|^2 + \| z \|^2\right). \quad (7.32)$$

Применяя к последнему слагаемому $\|z\|^2$ энергетическую оценку (7.10) (в которой h заменено на $\varepsilon^{m+1} g_m$), мы получим (7.14) для $j \leqslant 2l_1$.

Чтобы вывести оценки для производных более высокого порядка, следует только, аналогично тому, как это делалось в § 5, продифференцировать последовательно, по φ и по ρ уравнение (7.19) и применять каждый раз уже выведенные оценки.

---

[1]) Нормы членов, старших у $(\mathscr{L}_\varepsilon - L_\varepsilon) z_1$, мы оценили и перенесли соответствующие слагаемые в левую часть (7.29) и соответственно изменили константу C.

§ 8. Взаимные вырождения однохарактеристических и эллиптических уравнений

1. Уравнения нечетного порядка $2k_1+1$ вида

$$L_{2k_1+1}u \equiv M_1(M_{2k_1}u) + M'_{2k_1}u = h \tag{8.1}$$

мы будем называть однохарактеристическими[1]), если M_1 — оператор 1-го порядка, M_{2k_1} — эллиптический оператор порядка $2k_1$, а M'_{2k_1} — любой дифференциальный оператор порядка $\leqslant 2k_1$. Очевидно, вещественными характеристиками уравнения (8.1) будут лишь характеристики оператора 1-го порядка M_1. Ограничимся для простоты случаем, когда путем замены переменных оператор M_1 можно заменить оператором $\frac{\partial}{\partial x_1}$, т. е. когда характеристики можно превратить в семейство прямых, параллельных оси Ox_1.

Относительно границы Γ области Q, в которой рассматривается уравнение, мы предположим, что всякая характеристика, т. е. прямая $x_i = C_i$ $(i = 2, \ldots, n)$, имеющая общие точки с Q, пересекает Γ в двух точках $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $P^*(x_1^*, x_2, \ldots, x_n)$, $x_1 = x_1(x_2, \ldots, x_n)$, $x_1^* = x_1^*(x_2, \ldots, x_n)$, $x_1^* > x_1$. Геометрическое место точек P обозначим через Γ^-, а P^* — через Γ^+ (см. § 4). Пересечение $\overline{\Gamma^-}\cap\overline{\Gamma^+}$ есть $(n-2)$-мерное множество $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{D}$ есть геометрическое место точек касания характеристик с Γ. В качестве местной системы координат возьмем $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, где ρ, например, есть расстояние по внутренней нормали. Тогда в новых координатах, если $M_{2k_1} = b_{2k_1}(\rho, \varphi)\frac{\partial^{2k_1}}{\partial\rho^{2k_1}} + \ldots$, $\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos(\rho, x_1)\frac{\partial}{\partial\rho} + \ldots$, имеем $L_{2k_1+1} = a_{2k_1+1}\frac{\partial^{2k_1+1}}{\partial\rho^{2k_1+1}} + \ldots$, где $a_{2k_1+1} = \cos(\rho, x_1)\, b_{2k_1}$. Так как $b_{2k_1} \neq 0$ и имеет постоянный знак, то $a_{2k_1+1} \neq 0$ всюду вне $\mathfrak{D}$ и имеет противоположные знаки на Γ^- и Γ^+.

Первой краевой задачей для однохарактеристического уравнения (8.1) называется его решение при граничных условиях:

$$u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \ldots = \left.\frac{\partial^{k_1-1}u}{\partial n^{k_1-1}}\right|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial^{k_1}u}{\partial n^{k_1}}\right|_{\Gamma^*} = 0, \tag{8.2}$$

где Γ^* равняется Γ^+ или Γ^-. В одномерном случае первая краевая задача для однохарактеристического уравнения порядка $2k_1+1$ описана в § 3 (см. (3.29), (3.30)). Для уравнений 1-го порядка, которые являются однохарактеристическими, первая краевая задача есть задача Коши. Пусть оператор L_{2k_1+1} при условиях (8.2) позитивен[2]): $(L_{2k_1+1}u, u) \geqslant \alpha^2(u, u)$. Форме, стоящей слева, после k_1-кратного интегрирования по частям можно придать вид:

$$(L_{2k_1+1}u, u) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(M_{2k_1}u), u\right) + \ldots = \iint\limits_Q \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(B_{k_1}(u, u)) + \ldots\right] dx, \tag{8.3}$$

[1]) Вообще однохарактеристическими в области Q мы называем операторы вида $L_{2k_1+1} \equiv M_{2k_1+1} + M'_{2k_1}$, у которых оператор старшего порядка M_{2k_1+1} имеет в каждой точке $x \in Q$ одну вещественную и $2k_1$ комплексных характеристик.

[2]) Отметим, что иногда удается оператор L_{2k_1+1} привести к позитивному с помощью замены $u = u_1 e^{\gamma x_1}$. Мы считаем, что если это возможно, подобные замены уже произведены, и преобразованный оператор обозначаем также через L_{2k_1+1}.

где B_{k_1} — некоторая квадратичная форма от k_1-ых производных u, которая вблизи границы имеет вид $(-1)^{k_1} b_{2k_1}\left(\frac{\partial^{k_1}u}{\partial\rho^{k_1}}\right)^2+\ldots$, причем многоточием обозначены члены, содержащие хотя бы одну производную по φ_i. После интеграции по x_1 в случае $\Gamma^*=\Gamma^+$ получим:

$$(L_{2k_1+1}u,\ u)=-\int\limits_{\Gamma^-}\left[(-1)^{k_1}\cos(\rho,\ x_1)\, b_{2k_1}\left(\frac{\partial^{k_1}u}{\partial\rho^{k_1}}\right)^2+\ldots\right]d\Gamma^-+\ldots \tag{8.4}$$

В этом случае, так как $\cos(\rho,\ x_1)>0$, из требования позитивности оператора L_{2k_1+1} вытекает:

$$(-1)^{k_1+1}\, b_{2k_1}|_{\Gamma^-}>0. \tag{8.5}$$

Аналогично, если $\Gamma^*=\Gamma^-$, то

$$(-1)^{k_1+1}\, b_{2k_1}|_{\Gamma^+}<0. \tag{8.6}$$

Когда мы будем ниже говорить о первой краевой задаче для любого дифференциального уравнения порядка p, то всегда будем иметь в виду при $p=2s$ четном первую краевую задачу для эллиптического уравнения $2s$-го порядка и при $p=2s+1$ нечетном — определенную сейчас первую краевую задачу для уравнения нечетного порядка.

Пусть задача A_0 совпадает с 1-й краевой задачей для уравнения

$$L_k w=h, \tag{8.7}$$

а задача A_ε — первая краевая задача для уравнения

$$L_\varepsilon u\equiv L_k u+\sum_{r=1}^{l}\varepsilon^r L_{k+r}u \tag{8.8}$$

(см. § 6). Граничные условия задачи A_0 составляют часть условий задачи A_ε.

Мы в дальнейшем будем считать (как мы это делали в § 3), что в случае нечетного k или $k+l$, соответствующие граничные условия вида (8.2) выбираются всегда так, чтобы выполнялись необходимые условия (8.5) или (8.6) позитивности соответствующего оператора L_k (или L_{k+l}). В случае четности одного из этих операторов предполагается позитивность его характеристической формы.

Случай вырождения оператора четного порядка в четный мы уже рассмотрели. Возможны еще три случая вырождения уравнений (которые ниже проиллюстрированы примерами): эллиптического в однохарактеристическое, однохарактеристического в эллиптическое и однохарактеристического в однохарактеристическое.

Для этих трех случаев леммы 8, 9 предыдущего параграфа сохраняют свою силу. Именно:

Лемма 10. *Достаточным условием регулярности вырождения задачи A_ε в задачу A_0 является выполнение неравенства*

$$\operatorname{Re}\pi_\varepsilon(\xi;\ x)=\operatorname{Re}\sum_{r=0}^{l}\varepsilon^r\pi_{k+r}(\xi;\ x)>0 \ \textit{для}\ \xi\neq 0. \tag{8.9}$$

Доказательство этой леммы проводится так же, как доказательство леммы 8 (§ 7) и сводится к рассмотрению случаев, аналогичных указанным в § 3.

Лемма 11. *Для равномерной позитивности оператора A_ε достаточно, чтобы оператор L_k при соответствующих граничных условиях был позитивен и чтобы*

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\pi}_\varepsilon(\xi;\ x) &\equiv \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j}\pi_{2(k_1+j)}(\xi;\ x) \geqslant \alpha^2 \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j}\,|\,\xi\,|^{2(j+k_1)} \quad \text{при} \quad k=2k_1,\\ \tilde{\pi}_\varepsilon(\xi;\ x) &= \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1}\pi_{2(k_1+j)}(\xi;\ x) \geqslant \alpha^2 \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1}\,|\,\xi\,|^{2(j+k_1)} \quad \text{при} \quad k=2k_1+1.\end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 9 (§ 7) и при помощи соответствующих рассмотрений § 3.

В этих случаях опять-таки *достаточные условия регулярности заключены в достаточных условиях позитивности.*

К сожалению, общие предложения о разрешимости и дифференциальных свойствах решений для однохарактеристических уравнений порядка выше первого не исследованы (получены пока лишь частные результаты). Поэтому мы не можем, как мы это делали в предыдущем параграфе, вывести из лемм 10 и 11 теорему об асимптотическом разложении (7.11).

Однако, постулируя разрешимость и дифференциальные свойства решений задач A_ε и A_0 (в нечетном случае), мы можем получить асимптотику, аналогичную той, которая получена в § 6, и сформулировать теорему, аналогичную теоремам 10 и 11. При этом, как мы это подробно рассмотрели в §§ 4 и 5 для случая вырождения уравнения второго порядка в уравнение первого порядка, следует отдельно изучать асимптотику вблизи множеств $\mathfrak{D}$ перехода и в остальной части области Q.

Ниже мы приводим случай вырождения эллиптического уравнения порядка $2l_1$ в уравнение первого порядка и частные примеры на разные случаи взаимных вырождений эллиптических и однохарактеристических уравнений (порядка > 1).

2. Вырождение эллиптического уравнения высшего порядка в уравнение 1-го порядка. Асимптотика решения задачи A_ε. Пусть дано уравнение, которое с помощью замены переменных можно привести к виду

$$L_\varepsilon u \equiv \sum_{s=2}^{2l_1} \varepsilon^{s-1} L_s u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + fu = h, \qquad f \geqslant \gamma^2 > 0, \tag{8.11}$$

где L_{2l_1} — эллиптический оператор с позитивной характеристической формой. В области Q рассматривается задача A_ε, состоящая в решении уравнения (8.11) при граничных условиях

$$u\,\Big|_\Gamma = \ldots = \frac{\partial^{l_1-1} u}{\partial n^{l_1-1}}\Big|_\Gamma = 0. \tag{8.11$'$}$$

Отметим, что аналогичная задача встречалась в приложениях [52]. Предположим, что

$$\tilde{\pi}_\varepsilon(\xi;\ x) \equiv \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1}\pi_{2j}(\xi;\ x) \geqslant \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1}\,|\,\xi\,|^{2j}, \tag{8.12}$$

т. е. вещественная часть обобщенной характеристической формы оператора $\widetilde{L}_\varepsilon = \sum_{s=2}^{2l_1} \varepsilon^{s-1} L_s$ положительна. Для вырожденного уравнения

$$L_1 w \equiv \frac{\partial w}{\partial x_1} + f(x) w = h, \tag{8.13}$$

для того чтобы оператор L_1 был позитивен, граничные условия следует задавать на Γ^-:

$$w|_{\Gamma^-} = 0. \tag{8.14}$$

Леммы, аналогичные леммам 8 и 9 § 7, сейчас читаются следующим образом:

Лемма 10′. *Выполнение условия* (8.12) *является достаточным условием для регулярности вырождения задачи A_ε в задачу A_0, в которой граничное условие задается на* Γ^- (см. (8.14)).

Действительно, взяв локальную систему координат $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \rho)$ в окрестности точки $x_0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_{n-1}^0, 0) \in \Gamma^-$, мы, как и при доказательстве леммы 8 (§ 7), из (8.12) выведем, что

$$\pi_\varepsilon(0, \ldots, 0, \xi_n; x_0) = \varepsilon^{-1} P_{2l_1}(i\varepsilon\xi_n), \tag{8.15}$$

где через π_ε обозначена характеристическая форма оператора L_ε (записанного в координатах $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \rho)$):

$$\pi_\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n; x_0) = \sum_{s=2}^{2l} \varepsilon^{s-1} \pi_s(\xi_1, \ldots, \xi_n; x_0) + \\ + i(\xi_1 \cos(\varphi_1, x_1) + \ldots + \xi_n \cos(\rho, x_1)), \tag{8.16}$$

а

$$P_{2l_1}(\lambda) = \lambda Q_{\varphi^0}(\lambda) = \sum_{r=0}^{2l-1} a_{1+r}(\varphi^0) \lambda^{1+r}, \qquad a_1(\varphi^0) = \cos(\rho, x_1)|_{\varphi^0} \tag{8.17}$$

— характеристический многочлен введенного в § 6 дифференциального оператора M_0 (6.10) в точке x_0. Согласно (8.12), где положено $\xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = 0$, вещественная часть многочлена $P_{2l_1}(i\varepsilon\xi_n)$ положительна: $\operatorname{Re} P_{2l_1}(i\varepsilon\xi_n) \geqslant \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} |\xi_n|^{2j}$, и младший коэффициент $P_{2l_1}(\lambda)$: $a_1(\varphi^0) = \cos(\rho, x_1)|_{\varphi^0} > 0$. Отсюда согласно лемме 5 § 3 характеристическое уравнение $P_{2l_1}(\lambda) = 0$ имеет $l_1 - 1$ корней в левой полуплоскости, т. е. ровно столько, сколько граничных условий мы теряем на Γ^- при переходе от граничных условий (8.11) к (8.14). Аналогично убеждаемся, что на Γ^+ соответствующее характеристическое уравнение $P_{2l_1,\varphi^+}(\lambda) = 0$, $\varphi^+ \in \Gamma^+$, имеет l_1 корней, т. е. и на Γ^+ также имеет место регулярное вырождение.

Лемма 11′. *Если выполнено условие* (8.12) *и* $f(x) \geqslant \alpha^2 > 0$, *то оператор L_ε равномерно позитивен и, следовательно, задача A_ε равномерно разрешима.*

Доказательство этой леммы проводится точно так же, как доказательство леммы 9 (§ 7). Следует лишь заметить, что теперь вырожденный оператор L_1 позитивен:

$$(L_1 u, u) \geqslant \alpha^2 (u, u), \tag{8.18}$$

так как $f \geqslant \alpha^2$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u\right) = 0$, если u обращается в нуль на границе Γ (см. (8.11')).

Если $h(x)$ — достаточно гладкая функция, а также соответственно гладки коэффициенты L_ε и граница Γ, то мы, как и в § 6, сумеем провести оба итерационных процесса. Напомним, что решение w задачи A_0 (8.13), (8.14), как уже отмечалось в § 4, обладает вне окрестности множества $\overline{\Gamma^-} \cap \overline{\Gamma^+} = \mathfrak{D}$ такими же, грубо говоря, дифференциальными свойствами, как коэффициент f, правая часть h и граница Γ^-. Асимптотику для u_ε можно представить в виде

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i w_i + \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^j v_j + \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^j \alpha_j + z, \tag{8.19}$$

причем α_j отличны от нуля лишь вблизи Γ^-,

$$L_\varepsilon z = \varepsilon^{m+1} g_m, \tag{8.20}$$

g_m ограничена (вместе с производными) в любой подобласти, не содержащей некоторой окрестности множества $\mathfrak{D}$.

Пусть функция $\zeta(x_2, \ldots, x_n)$ обращается в нуль вблизи $\mathfrak{D}$ и равна 1 вне большей окрестности $\mathfrak{D}$. Составляя уравнение, которому удовлетворяет функция ζz, и, умножая скалярно обе части этого уравнения на ζz, мы с помощью таких же рассуждений, какие проводились в § 5 (стр. 66), найдем:

$$\sum_{|j|=1}^{l} \varepsilon^{2j-1} \| D^{(j)} z \|_{\widetilde{Q}}^2 + \| z \|_{\widetilde{Q}}^2 \leqslant C \varepsilon^{2(m+1)}, \tag{8.21}$$

где $\widetilde{Q} = Q - U(\mathfrak{D})$.

Теорема 12. *При достаточной гладкости параметров задачи A_ε* (8.11), (8.11') *и при выполнении условия* (8.12) *решение u_ε задачи A_ε представимо в виде* (8.19), *где w_0 — решение вырожденной задачи A_0* (8.13), (8.14), *w_i — решения аналогичных уравнений 1-го порядка при граничных условиях* (8.14), *v_i — функции типа погранслоя, а невязка z удовлетворяет неравенствам* (8.21).

Далее можно было бы вывести оценки для высших производных от z в $\widetilde{Q}$, аналогичные оценкам (4.42), но для краткости мы их здесь не приводим.

3. Примеры взаимных вырождений однохарактеристических и эллиптических уравнений. а) Рассмотрим в прямоугольнике $Q\,(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi)$ уравнение

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \Delta\Delta u + \frac{\partial}{\partial x} \Delta u = h(x, y), \tag{8.22}$$

при граничных условиях первой краевой задачи:

$$u\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \tag{8.23}$$

(задача A_ε). При $\varepsilon = 0$ оно вырождается в однохарактеристическое уравнение

$$L_0 w \equiv \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) = h(x, y). \tag{8.24}$$

Задача A_0, в которую, как мы покажем, регулярно вырождается задача A_ε, состоит в решении уравнения (8.24) при условиях

$$w\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0. \tag{8.25}$$

Решение w задачи A_0 легко получить с помощью метода Фурье: ищем w в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \sin ny;$$

для $c_n(x)$ после подстановки этого ряда в (8.24) получим обыкновенное уравнение

$$c_n''' - n^2 c_n' = h_n(x), \tag{8.26}$$

где $h(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \sin ny$, которое решаем в соответствии с (8.25) при граничных условиях:

$$c_n(0) = c_n(a) = 0, \ c_n'(a) = 0. \tag{8.27}$$

Легко видеть, что задача (8.26), (8.27) имеет, и притом единственное, решение, причем справедлива оценка:

$$\| c_n''' \|^2 + n^2 \| c_n'' \|^2 + n^4 \| c_n' \|^2 + n^4 \| c_n \|^2 + n^2 \| c_n' \|^2 + \| c_n'' \|^2 \leqslant K \| h_n \|^2, \tag{8.28}$$

причем все нормы берутся в $\mathscr{L}_2(0, a)$; K не зависит ни от n, ни от $h_n(x)$. Отсюда получаем, что функция w допускает все производные, входящие в (8.24), а также соответствующие производные низшего порядка, и все эти производные принадлежат $\mathscr{L}_2(0, a)$. Имеет место оценка:

$$\sum_{|i| \leqslant 2} \left\| \frac{\partial}{\partial x} D^{(i)} w \right\|_Q^2 + \sum_{|i| \leqslant 2} \| D^{(i)} w \|_Q^2 \leqslant C \| h \|_Q^2. \tag{8.29}$$

Если h имеет высшие производные из $\mathscr{L}_2$ и выполнены соответствующие дополнительные условия, то w допускает соответствующие производные высшего порядка и имеют место оценки, аналогичные (8.29).

Вместо того чтобы проверить на всех сторонах квадрата выполнение алгебраических условий регулярности вырождения задачи A_ε в задачу A_0, мы явно построим соответствующие погранслои (выпишем явно соответствующие операторы M_0) и докажем, что с их помощью можно устранить невязки в граничных условиях решений u_ε и w задач A_ε и A_0.

Для погашения невязки в граничных условиях для u_ε и w вблизи частей границы $x = 0$, $y = 0$, $y = \pi$ построим погранслои. Для получения погранслоя вблизи части границы Γ_1 ($y = 0$) (совпадающей с характеристикой) следует в области D ($x < a$, $y > 0$) найти решение уравнения

$$M_0 v \equiv \varepsilon^2 \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \equiv \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \text{ [1]}, \tag{8.30}$$

[1] Чтобы в этом убедиться, достаточно умножить (8.22) на ε и сделать замену $\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}} = t$. M_0 будет главным членом оператора $\varepsilon L_\varepsilon$, записанного в координатах (t, x).

где $t=\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}$, при граничных условиях

$$v|_{x=a}=-w|_{x=a}=0,\quad v|_{y=0}=-w|_{y=0}=0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0}=-\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi(x) \tag{8.31}$$

(ср. с § 4, п. 5); очевидно, $\varphi(a)=0$, $\varphi'(a)=0$[1]); полагаем $\varphi(x)\equiv 0$ для $x<0$. При этом v должно иметь вблизи $y=0$ характер погранслоя. Задача (8.30), (8.31) может быть решена, например, следующим образом: полагаем $\frac{\partial v}{\partial y}=p$ и решаем в области $(x<a,\ y>0)$ для p задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad p|_{x=a}=0,\quad p|_{y=0}=\varphi(x), \tag{8.32}$$

решение которой дается в виде, аналогичном (4.50) (без множителя $\exp(a-x_1)$). Искомый погранслой $v_1=\psi\left(\frac{y}{\delta}\right)v$, где $v=\int\limits_0^y p\,dy$. Очевидно, v является решением задачи (8.30), (8.31). Погранслой v_2 вблизи линии $y=\pi$ строится совершенно аналогично. Далее строим погранслой вблизи границы $\Gamma_3\,(x=0)$ как решение обыкновенного уравнения по $x\,(x=\rho)$:

$$M_1 v\equiv\varepsilon^4\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\varepsilon^3\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\equiv\frac{\partial^4 v}{\partial t^4}+\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}=0 \tag{8.33}$$

$\left(M_1\right.$ — главная часть оператора $\varepsilon^3 L_\varepsilon$ после замены $\left.\frac{x}{\varepsilon}=t\right)$ при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned} &v|_{x=0}=-(w+v_1+v_2)|_{x=0}=-(v_1+v_2)|_{x=0}=\varphi_1(y),\\ &\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=-\left.\frac{a\,(w+v_1+v_2)}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi_2(y);\\ &\varphi_1(y)=O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}),\quad \varphi_2(y)=O(1). \end{aligned}\right\} \tag{8.34}$$

Для наших целей достаточно решить уравнение $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial v}{\partial t}=0$ при условиях (8.34).

Очевидно такое решение $v=\varphi_1(y)+\varepsilon\varphi_2(y)-\varepsilon\varphi_2(y)\,e^{-\frac{x}{\varepsilon}}=O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})+O(\varepsilon)\,e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ и имеет характер погранслоя, и обращается в нуль вместе с производными по x и по y при $y=0$ и $y=\pi$. Последнее вытекает из того, что функция $w+v_1+v_2$, стоящая справа в (8.34), вместе с производной по y обращается в нуль при $x=0$, $y=0$ и $x=0$, $y=\pi$; кроме того, $\frac{\partial\,(w+v_1+v_2)}{\partial x}=0$ в этих точках. Положим $v_3=\psi\left(\frac{x}{\delta}\right)v$. Невязка $z=u_\varepsilon-(w+v_1+v_2+v_3)$ удовлетворяет граничным условиям (8.23) на всей границе Γ, и если $h\in W_2$, то, исходя, например, из основного энергетического неравенства для функции $z_1=e^{kx}z$, $k>0$ и k — малое, получим, как в доказательстве теоремы 6,

$$\sum_{|i|=2}\varepsilon\,\|D^{(i)}z_1\|^2+\sum_{|j|=1}\|D^{(j)}z_1\|^2+\|z_1\|^2\leqslant C\varepsilon. \tag{8.35}$$

[1]) Мы считаем, что выполнены достаточные условия, гарантирующие непрерывную дифференцируемость в $\overline{Q}$ функции $w(x,\ y)$.

Отсюда находим, что

$$\|D^{(i)}z\| = O(1) \qquad (|i| = 2); \qquad \|D^{(j)}z\| = O(\sqrt{\varepsilon}) \qquad (|j| \leqslant 1), \tag{8.36}$$

$$\left.\begin{aligned} u_\varepsilon &= w + (v_1 + v_2 + v_3) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \\ D^{(j)}u_\varepsilon &= D^{(j)}w + D^{(j)}(v_1 + v_2 + v_3) + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \text{ для } |j| = 1, \\ D^{(i)}u_\varepsilon &= D^{(i)}w + D^{(i)}(v_1 + v_2 + v_3) + O(1) \text{ для } |i| = 2. \end{aligned}\right\} \tag{8.37}$$

Более точную асимптотику, чем (8.37), можно получить, применяя вышеуказанные итерационные процессы и оценки, аналогичные (4.42). Мы на этом здесь останавливаться не будем.

b) Рассмотрим теперь пример вырождения однохарактеристического уравнения в эллиптическое.

Пусть в прямоугольнике Q дано уравнение

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\Delta u - \Delta u = h \tag{8.38}$$

при граничных условиях

$$u|_\Gamma = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \tag{8.39}$$

(задача A_ε); $h \in W_2^{(1)}$. Эта задача при $\varepsilon \to 0$ регулярно вырождается, как мы покажем, в задачу

$$L_0 w \equiv -\Delta w = h, \qquad w|_\Gamma = 0. \tag{8.40}$$

Выполнение необходимых алгебраических условий регулярности вырождения мы докажем явно, построив погранслои.

Погранслой v надо построить лишь вблизи части границы Γ_1 $(x = a)$. Взяв $\rho = a - x$, $\varphi = y$, получим для v в первом приближении

$$M_0 v \equiv -\varepsilon^3 \frac{\partial^3 v}{\partial \rho^3} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \equiv -\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \tag{8.41}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = -\left.\frac{\partial w}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = f(y). \tag{8.42}$$

Очевидно, решение v задачи (8.41), (8.42) типа погранслоя имеет вид

$$v = -\varepsilon f(y)\, e^{-\frac{\rho}{\varepsilon}} \equiv -\varepsilon f(y)\, e^{-\frac{a-x}{\varepsilon}}. \tag{8.43}$$

Для того чтобы $v|_{x=a} = 0$, достаточно подправить эту функцию следующим образом:

$$\widetilde{v} = -\varepsilon f(y)\,(e^{-\frac{x-a}{\varepsilon}} - 1). \tag{8.43'}$$

Наконец, полагаем $v_1 = \widetilde{v}\psi\left(\frac{a-x}{\delta}\right)$. Далее, как выше, оценивая разность $u_\varepsilon - w - v_1 = z$, находим асимптотику для u_ε в первом приближении.

c) Рассмотрим, наконец, пример однохарактеристического уравнения, вырождающегося в однохарактеристическое.

Пусть в квадрате $Q(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$ дано уравнение

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}(\Delta u) - \varepsilon\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = h \tag{8.44}$$

при граничных условиях

$$u|_\Gamma = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 \qquad (0\leqslant y\leqslant 1), \tag{8.45}$$

(задача A_ε). Для вырожденного уравнения

$$L_1 w \equiv \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + w = h \tag{8.46}$$

зададим граничные условия

$$w|_{x=0} = 0,\ w|_{y=0} = 0 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1) \tag{8.47}$$

(задача A_0). Легко проверить, что необходимые алгебраические условия регулярного вырождения задачи A_ε в задачу A_0, приведенные в п. а), выполнены. Ниже мы в этом убедимся, явно построив погранслои на сторонах Q: $\Gamma_1(x=1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$, $\Gamma_2(0\leqslant x\leqslant 1,\ y=1)$, где происходит невязка в граничных условиях (8.45) и (8.46).

Для того чтобы решение w задачи A_0 не имело излома на биссектрисе BC, $B(0,\ 0)$, $C(1,1)$, мы ограничимся лишь тем случаем, когда $h(x,\ y)$ обращается в нуль на BC (соответствующего порядка; в противном случае следовало бы построить также погранслой вблизи BC).

Вблизи Γ_1 возьмем $\rho = 1 - x$, $t = \frac{\rho}{\varepsilon}$

$$\varepsilon L_\varepsilon v \equiv -\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) -$$
$$- \varepsilon\frac{\partial v}{\partial\rho} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon v = -\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t} +$$
$$+ \varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial y} + v\right) + \varepsilon^2\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial t\,\partial y^2}\right),$$

$$M_0 v \equiv -\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{8.47'}$$

Решением типа погранслоя последнего уравнения является

$$v_0 = \varphi_1(y)\,e^{-\lambda_1 t} + \varphi_2(y)\,e^{-\lambda_2 t} = \varphi_1(y)\,e^{-\frac{\lambda_1(1-x)}{\varepsilon}} + \varphi_2(y)\,e^{-\frac{\lambda_2(1-x)}{\varepsilon}},$$
$$\lambda_{1,\,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ определяем из системы:

$$\left.\begin{aligned} v|_{x=1} &= \varphi_1(y) + \varphi_2(y) = -w|_{x=1}, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=1} &= \frac{\lambda_1}{\varepsilon}\varphi_1(y) + \frac{\lambda_2}{\varepsilon}\varphi_2(y) = -\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=1}. \end{aligned}\right\} \tag{8.48}$$

Далее погранслой v_0 можно уточнить, построив следующее приближение v_1 для погранслоя вблизи Γ_1, как решение уравнения:

$$M_0 v_1 = -R_1 v_0 = -\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + v_0\right) \tag{8.49}$$

при нулевых начальных условиях

$$v_1|_{t=0} = \frac{\partial v_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{8.50}$$

Очевидно, $v_1 = (t\alpha_1(y)+\beta_1(y))\,e^{-\lambda_1 t} + (t\alpha_2(y)+\beta_2(y))\,e^{-\lambda_2 t} = P_1\left(y, \frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda_1 \frac{1-x}{\varepsilon}} + P_2\left(y, \frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda_2 \frac{1-x}{\varepsilon}}$, где α_1, α_2, β_1, β_2 выражаются через φ_1, φ_2, φ_1', φ_2'. Функцию $\tilde{v}_1 = \psi\left(\frac{1-x}{\delta}\right)(v_0 + \varepsilon v_1)$ принимаем в качестве погранслоя вблизи Γ_1.

Вблизи Γ_2 возьмем $\rho = 1 - y$, $t = \frac{1-y}{\varepsilon}$,

$$\varepsilon L_\varepsilon v = -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial v}{\partial x} + v\right) - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3},$$

$$M_0 v \equiv -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{8.51}$$

Решением типа погранслоя этого уравнения является функция $\bar{v}_0 = \beta(x)\,e^{-t} = \beta(x)\,e^{-\frac{1-y}{\varepsilon}}$; $\beta(x)$ определяем из условия

$$\bar{v}_0|_{t=0} = \bar{v}_0|_{y=1} = \beta(x) = -(w + \tilde{v}_1)|_{y=1}. \tag{8.52}$$

Далее находим следующее приближение $\bar{v}_1$ из уравнения

$$M_0 \bar{v}_1 = -R_1 \bar{v}_0 = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} + \bar{v}_0\right) \tag{8.53}$$

при нулевом начальном условии $\bar{v}_1|_{t=0} = v_1|_{y=0} = 0$. В качестве погранслоя вблизи Γ_2 принимаем:

$$\tilde{v}_2 = \psi\left(\frac{1-y}{\sigma}\right)(\bar{v}_0 + \varepsilon \bar{v}_1). \tag{8.54}$$

Положим:

$$u_\varepsilon = w + \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 + z,$$

где u_ε — решение задачи A_ε (его можно построить, например, методом интегральных уравнений, умножая обе части (8.44) на оператор $\left(\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}\Delta - \varepsilon\Delta\right)^{-1}$), w — решение задачи A_0, а $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ — построенные выше погранслои. Невязка z удовлетворяет однородным граничным условиям (8.45) и

$$L_\varepsilon z = L_\varepsilon(u_\varepsilon - (w + \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2)) = h - h - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) + \varepsilon\Delta w - L_\varepsilon \tilde{v}_1 - L_\varepsilon \tilde{v}_2 = O(\varepsilon). \tag{8.55}$$

Отсюда выводим, что в метрике $\mathscr{L}_2(Q)$ $\|z\| = O(\varepsilon)$, $\|Dz\| = O(\varepsilon)$; эти оценки вытекают из энергетического неравенства $\|z\|^2 + \sum \varepsilon\|Dz\|^2 \leqslant C \cdot O(\varepsilon^2)$, а также соответствующие оценки для высших производных. Эти оценки показывают, что из невязки z уже удалена главная часть погранслоя (см. пример а)).

§ 9. Асимптотическое представление собственных значений и собственных функций вырождающихся операторов

1. Отметим некоторые элементарные свойства самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H. Пусть A — такой оператор с чисто точечным спектром, Ω_A — область определения оператора A и $\{u_i\}$, $\{\lambda_i\}$ — соответственно полная ортонормированная система собственных элементов и отвечающих им собственных значений: $Au_i = \lambda_i u_i$, $\|u_i\| = 1$.

а) Лемма 12. *Если u — произвольный элемент из Ω_A, λ — произвольное вещественное число, то*

$$\inf_i |\lambda - \lambda_i| \leqslant \frac{\|Au - \lambda u\|}{\|u\|}. \tag{9.1}$$

В самом деле, $u = \sum_i c_i u_i \quad (c_i = (u, u_i)), \quad \|u\|^2 = \sum_i c_i^2)$,

$$Au - \lambda u = \sum_i c_i (\lambda_i - \lambda) u_i, \quad \|Au - \lambda u\|^2 = \sum_i c_i^2 (\lambda_i - \lambda)^2.$$

Поэтому

$$\|Au - \lambda u\|^2 \geqslant \sum_i c_i^2 [\inf_i |\lambda - \lambda_i|]^2 = \|u\|^2 [\inf_i |\lambda - \lambda_i|]^2,$$

откуда и следует неравенство (9.1).

б) Пусть $\|Au - \lambda u\| = \alpha$, $\|u\| = 1$, d — некоторое число, $d > \alpha$.

Разобьем собственные значения $\{\lambda_i\}$ и соответствующие собственные элементы $\{u_i\}$ на две группы:

1) Собственные значения $\{\nu_r\}$, лежащие на отрезке $[\lambda - d, \lambda + d]$, и соответствующие собственные функции $\{v_r\}$. Их замкнутую линейную оболочку обозначим через T_d^0.

2) Собственные значения $\{\mu_s\}$, лежащие вне $[\lambda - d, \lambda + d]$, и соответствующие собственные элементы $\{w_s\}$. Их замкнутую линейную оболочку обозначим через T_d^1. Очевидно, $T_d^0 \oplus T_d^1 = H$.

Лемма 13. *Существует в T_d^0 элемент u_0, для которого*

$$\|u - u_0\| \leqslant \frac{2\alpha}{d}, \quad \|u_0\| = 1. \tag{9.2}$$

В самом деле, если проекции u на T_d^0 и T_d^1 обозначить соответственно через u_d^0 и u_d^1, то

$$\|u_d^0\|^2 + \|u_d^1\|^2 = 1,$$

$$\alpha^2 = \|Au - \lambda u\|^2 = \|Au_d^0 - \lambda u_d^0\|^2 + \|Au_d^1 - \lambda u_d^1\|^2. \tag{9.3}$$

Если $\bar{c}_s = (u_d^1, w_s)$, то $u_d^1 = \sum_s \bar{c}_s w_s$, $Au_d^1 - \lambda u_d^1 = \sum_s \bar{c}_s (\mu_s - \lambda) w_s$; так как $|\mu_s - \lambda| > d$, то

$$\|Au_d^1 - \lambda u_d^1\|^2 = \sum_s (\mu_s - \lambda)^2 \bar{c}_s^2 > d^2 \sum_s \bar{c}_s^2 = d^2 \|u_d^1\|^2.$$

Отсюда и из (9.3) имеем:

$$\|u_d^1\| < \frac{1}{d} \|Au_d^1 - \lambda u_d^1\| \leqslant \frac{1}{d} \|Au - \lambda u\| = \frac{\alpha}{d},$$

$$\|u - u_d^0\| = \|u_d^1\| < \frac{\alpha}{d}, \tag{9.4}$$

$$\|u_d^0\| \geqslant \|u\| - \|u_d^1\| > 1 - \frac{\alpha}{d} > 0. \tag{9.5}$$

Обозначая $u_0 = \frac{1}{\| u_d^0 \|} u_d^0$, имеем $\| u_0 \| = 1$, при этом в силу (9.4) и (9.5)

$$\| u - u_0 \| \leqslant \| u - u_d^0 \| + \| u_0 - u_d^0 \| < \frac{\alpha}{d} + (1 - \| u_d^0 \|) \| u_0 \| =$$

$$= \frac{\alpha}{d} + (1 - \| u_d^0 \|) \leqslant \frac{\alpha}{d} + \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{d} \right) \right] = \frac{2\alpha}{d}.$$

Так как $u_0 \in T_d^0$, $\| u_0 \| = 1$, то мы доказали лемму.

в) Заметим в заключение, что если λ есть простое собственное значение оператора A и u_0 — соответствующий нормированный собственный элемент, то в H_1 — ортогональном дополнении к u_0 в H — оператор $A - \lambda I$ имеет ограниченный обратный $(A - \lambda I)_{H_1}^{-1}$ (псевдорезольвенту). При любом $v \in H$ уравнение

$$Ax - \lambda x + \mu u_0 = v \tag{9.6}$$

относительно $x \in H_1$ и числа μ разрешимо, именно

$$\mu = (v, u_0), \quad x = (A - \lambda I)_{H_1}^{-1} (v - \mu u_0) \tag{9.6'}$$

($v - \mu u_0$ есть элемент H_1).

2. Перейдем теперь к интересующей нас задаче. Обозначая через L_{2k_1} эллиптический самосопряженный оператор порядка $2k_1$, действующий на функции u, определенные в ограниченной n-мерной области Q, для которых этот оператор имеет смысл и для которых выполнены граничные условия (6.2') первой краевой задачи.

Аналогично через L_ε обозначим самосопряженный эллиптический оператор $L_{2k_1} + \varepsilon^2 L_{1\varepsilon}$, $L_{1\varepsilon} = \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2(j-1)} L_{2(k_1+j)}$ — оператор, действующий на функции u, определенные в области Q, для которых он имеет смысл и для которых выполнены граничные условия (6.2'), (6.4') первой краевой задачи.

Пусть $\lambda_{10} \leqslant \lambda_{20} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{i0} \leqslant \ldots$ и соответственно $\lambda_{1\varepsilon} \leqslant \lambda_{2\varepsilon} \leqslant \ldots \ldots \leqslant \lambda_{i\varepsilon} \leqslant \ldots$ — упорядоченные в порядке возрастания собственные значения операторов L_{2k_1} и L_ε и $\{u_{i0}\}$ и $\{u_{i\varepsilon}\}$ — полные ортонормированные системы собственных элементов этих операторов:

$$L_{2k_1} u_{i0} = \lambda_{i0} u_{i0}, \qquad L_\varepsilon u_{i\varepsilon} = \lambda_{i\varepsilon} u_{i\varepsilon}. \tag{9.7}$$

Предполагая границу Γ области Q и коэффициенты операторов L_{2k_1}, L_ε достаточно гладкими, получим, что собственные функции u_{i0}, $u_{i\varepsilon}$ имеют соответствующий порядок гладкости. Это было доказано О. А. Ладыженской [33] для эллиптических операторов 2-го порядка; для интересующего нас случая эллиптических операторов порядка $2k_1$ (k_1 — любое) это следует из дифференциальных свойств решений первой краевой задачи, установленных О. В. Гусевой [44] (см. также Ниренберг [45], [48]). Если же полагать границу Γ и коэффициенты бесконечно дифференцируемыми, то такими же будут u_{i0} и $u_{i\varepsilon}$.

Мы будем полагать, что $L_{1\varepsilon} = \sum_{s=1}^{l_1} \varepsilon^{2(s-1)} L_{2(k+s)}$ удовлетворяет условиям § 7 и является позитивным:

$$(L_{1\varepsilon} u, u) \geqslant 0 \tag{9.8}$$

для любых u из области определения $L_{1\varepsilon}$ (а значит L_ε), т. е. $u \in W_2^{2(k_1+l_1)}$, удовлетворяющих условиям (6.2′), (6.4′).

Так как область определения Ω_{L_ε} оператора L_ε есть часть области определения $\Omega_{L_{2k_1}}$ оператора L_{2k_1} и для каждого u из Ω_{L_ε} в силу (9.8)

$$(L_\varepsilon u,\ u) \geqslant (L_{2k_1} u,\ u), \tag{9.9}$$

то из минимаксной теории собственных значений Куранта следует:

$$\lambda_{i\varepsilon} \geqslant \lambda_{i0} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{9.10}$$

Как доказано в § 7, вырождение оператора L_ε в оператор L_{2k_1} — регулярное.

Существует в силу построения § 6 функция v_ε типа погранслоя порядка k_1, такая, что $v_\varepsilon = \varepsilon^{k_1}\bar{v}_\varepsilon$,

$$L_\varepsilon(\varepsilon^{k_1}\bar{v}_\varepsilon) = O(\varepsilon), \qquad \|\bar{v}_\varepsilon\| = O(1) \tag{9.11}$$

и что $u_{i0} + \varepsilon^{k_1}\bar{v}_\varepsilon$ удовлетворяет условиям (6.4′), $\bar{v}_\varepsilon = \psi\left(\frac{\rho}{\delta}\right)[\bar{v}_0 + \varepsilon\bar{v}_1 + \ldots$ $\ldots + \varepsilon^{k_1}\bar{v}_{k_1}]$. С другой стороны, можно так же, как в § 6, найти функцию $\varepsilon\alpha_\varepsilon$ такую, что

$$w = u_{i0} + \varepsilon^{k_1}\bar{v}_\varepsilon + \varepsilon\alpha_\varepsilon$$

удовлетворяет всем краевым условиям (6.2′), (6.4′) и

$$(L_{2k_1} - \lambda_{i0})(\varepsilon\alpha_\varepsilon) = O(\varepsilon). \tag{9.12}$$

Так как $\|w\| \geqslant \|u_{i0}\| - \varepsilon^{k_1}\|\bar{v}_\varepsilon\| - \varepsilon\|\alpha_\varepsilon\| = 1 - O(\varepsilon)$, то

$$\|w\| \geqslant 1 - d_i\varepsilon, \qquad d_i \text{ — константа}. \tag{9.13}$$

Далее,

$$\begin{aligned}(L_\varepsilon w - \lambda_{i0} w) &= (L_{2k_1} + \varepsilon^2 L_{1\varepsilon} - \lambda_{i0} I)(u_{i0} + \varepsilon^{k_1}\bar{v}_\varepsilon + \varepsilon\alpha_\varepsilon) = \\ &= (L_{2k_1} - \lambda_{i0} I)\, u_{i0} + \varepsilon^2 L_{1\varepsilon} u_{i0} + \varepsilon^{k_1}(L_\varepsilon - \lambda_{i0} I)\,\bar{v}_\varepsilon + \varepsilon(L_\varepsilon - \lambda_{i0} I)\,\alpha_\varepsilon = \\ &= \varepsilon^2 L_{1\varepsilon} u_{i0} + L_\varepsilon(\varepsilon^{k_1}\bar{v}_\varepsilon) - \varepsilon^{k_1}\lambda_{i0}\bar{v}_\varepsilon + \varepsilon(L_\varepsilon - \lambda_{i0} I)\,\alpha_\varepsilon.\end{aligned} \tag{9.14}$$

В силу наших замечаний о гладкости собственных функций u_{i0}

$$\|L_{1\varepsilon} u_{i0}\| = O(1).$$

Отсюда и из (9.11), (9.14) следует:

$$\|L_\varepsilon w - \lambda_{i0} w\| = O(\varepsilon),$$

и, далее, из (9.13) имеем:

$$\frac{\|L_\varepsilon w - \lambda_{i0} w\|}{\|w\|} \leqslant b_i\varepsilon, \qquad b_i \text{ — константа}.$$

В силу леммы 12 в интервале $[\lambda_{i0} - b_i\varepsilon,\ \lambda_{i0} + b_i\varepsilon]$ существует собственное значение $\bar{\lambda}_{i\varepsilon}$ оператора L_ε.

Положим теперь, что собственные значения λ_{i0} $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ — простые: $\lambda_{10} < \lambda_{12} < \ldots < \lambda_{i0} < \ldots < \lambda_{k0} < \lambda_{k+1,\,0}$. Из неравенства (9.10) следует: $\lambda_{k+1,\,\varepsilon} \geqslant \lambda_{k+1,\,0}$.

Существует не более k собственных значений $\lambda_{i\varepsilon}$, меньших $\lambda_{k+1,\,0}$.

При достаточно малом ε интервалы $[\lambda_{i0} - b_i\varepsilon,\ \lambda_{i0} + b_i\varepsilon]$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ не пересекаются и $\lambda_{k0} + b_k\varepsilon < \lambda_{k+1,\,0}$. В каждом таком интервале находится собственное значение $\bar{\lambda}_{i\varepsilon}$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, все они попарно не равны и все они меньше $\lambda_{k+1,0}$. Они, следовательно, совпадают с первыми k собственными значениями $\lambda_{1\varepsilon}, \lambda_{2\varepsilon}, \ldots, \lambda_{i\varepsilon}, \ldots, \lambda_{k\varepsilon}$, которые меньше $\lambda_{k+1,0} \leqslant \lambda_{k+1,\varepsilon}$, т. е. $\bar{\lambda}_{i\varepsilon}=\lambda_{i\varepsilon}$ при $i=1, 2, \ldots, k$, и так как $|\lambda_{i0}-\lambda_{i\varepsilon}| \leqslant b_i\varepsilon$, то приходим к следующей лемме:

Лемма 14. *Для каждого i $(i=1, 2, \ldots)$ существует константа $b_i > 0$ такая, что*

$$|\lambda_{i\varepsilon}-\lambda_{i0}| \leqslant b_i\varepsilon. \tag{9.15}$$

Эта лемма доказывается и для случая кратных собственных значений λ_{i0}. В этом случае доказательство дословно повторяет доказательство леммы в работе [37].

Наша задача — найти асимптотическое разложение собственного значения:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{i\varepsilon}=\mu_0+\mu_1\varepsilon+\mu_2\varepsilon^2+\ldots+\mu_m\varepsilon^m+\varepsilon^{m+1}\delta_{m+1}, \\ &\mu_0=\lambda_{i0}, \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

и собственной функции $\bar{u}_{i\varepsilon}$ оператора L_ε:

$$\bar{u}_{i\varepsilon}=w_0+\varepsilon w_1+\varepsilon^2 w_2+\ldots+\varepsilon^m w_m+\varepsilon^{k_1}(\bar{v}_0+\varepsilon\bar{v}_1+\ldots+\varepsilon^{m+k_1}\bar{v}_{m+k_1})+ \\ +\varepsilon(\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\ldots+\varepsilon^{m+k_1}\alpha_{m+k_1})+\varepsilon^{m+1}z_m, \tag{9.17}$$

где $w_0=u_{i0}$, w_i и α_i — функции с ограниченными производными любого порядка, $\bar{v}_i$ — функция типа погранслоя $\|z_m\|=O(1)$. Это разложение аналогично разложению (6.13) и строится аналогичным методом: из того, что $L_\varepsilon=L_{2k_1}+\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}L_{2(k_1+j)}$, и из (9.16), (9.17) имеем:

$$0=(L_\varepsilon\bar{u}_{i\varepsilon}-\lambda_{i\varepsilon}\bar{u}_{i\varepsilon})=$$

$$=\Bigg\{\Bigg[\Bigg(L_{2k_1}+\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}L_{2(k_1+j)}\Bigg)-\Bigg(\mu_0+\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j\mu_j+\varepsilon^{m+1}\delta_{m+1}\Bigg)I\Bigg]\Bigg[w_0+\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j w_j+ \\ +\varepsilon\Bigg(\alpha_0+\sum_{j=1}^{m+k_1}\varepsilon^j\alpha_j\Bigg)\Bigg]\Bigg\}+\varepsilon^{-k_1}\Bigg\{\Bigg[M_0+\sum_{j=1}^{m+k_1+1}\varepsilon^j R_j- \\ -\varepsilon^{k_1}\Bigg(\mu_0+\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j\mu_j+\varepsilon^{m+1}\delta_{m+1}\Bigg)I\Bigg]\Bigg(\bar{v}_0+\sum_{j=1}^{m+k_1}\varepsilon^j\bar{v}_j\Bigg)\Bigg\}+ \\ +\varepsilon^{m+1}(L_\varepsilon-\lambda_{i\varepsilon}I)z_m. \tag{9.18}$$

Соединяя в первых фигурных скобках члены, свободные от ε, получаем:

$$L_{2k_1}w_0-\mu_0 w_0=0, \quad \mu_0=\lambda_{i0};$$

решение этого уравнения при условиях (6.2′) и $\|w_0\|=1$ дает $w_0=u_{i0}$.

Соединяя во вторых фигурных скобках члены при ε^{-k_1}, получаем:

$$M_0\bar{v}_0=0.$$

Решение этого уравнения при условиях (6.17) и требовании, что $\bar{v}_0$ — функция типа погранслоя, определяет $\bar{v}_0$ в виде (6.17′) ($\bar{v}_0$ еще помножается на погашающую функцию $\psi\left(\frac{\rho}{\delta}\right)$, как на стр. 87).

$\varepsilon\alpha_0$ подбирается, как в § 6, так, что

$$w_0 + v_0 + \varepsilon\alpha_0$$

удовлетворяет всем условиям (6.2′), (6.4′).

Пусть определены w_i, v_i, α_i, μ_i при $i < r$. Соединяя члены при $\varepsilon^r (r \leqslant m)$ в первых фигурных скобках и приравнивая их нулю, получаем уравнение

$$(L_{2k_1} - \lambda_{i0} I) w_r - \mu_r w_0 = - \sum_{j=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} L_{2(k_1+j)} w_{r-2j} + \sum_{j=1}^{r-1} \mu_j w_{r-j} -$$
$$- L_{2k_1} \alpha_{r-1} - \sum_{j=1}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} L_{2(k_1+j)} \alpha_{r-2j-1} + \sum_{j=0}^{r-1} \mu_j \alpha_{r-j-1} \equiv g_r, \tag{9.19}$$

где $[s] = \min(\{s\}, l_1)$, $\{s\}$ — целая часть s. Требуем для w_r выполнения условий (6.2′). Таким образом, задача нахождения w_r и μ_r свелась к задаче (9.6). Решаем эту задачу (см. стр. 110):

$$\mu_r = (g_r, u_{i0}),$$
$$w_r = (L_{2k_1} - \mu_0 I)^{-1}_{H_{i1}} g_r,$$

H_{i1} — ортогональное дополнение к функции u_{i0} в $H = \mathscr{L}_2(Q)$. Объединяя все члены при ε^{r-k_1} во вторых фигурных скобках $(r \leqslant m + k_1)$ и приравнивая их нулю, получаем:

$$M_0 \bar{v}_r = - \sum_{j=1}^{r} R_j \bar{v}_{r-j} + \sum_{j=0}^{r-k_1} \mu_j \bar{v}_{r-k_1-j} \tag{9.19′}$$

(вторая сумма появляется лишь при $r \geqslant k_1$). Требуем, чтобы $\bar{v}_r$ была функцией типа погранслоя, для $v_r + w_r$ $(v_r = \varepsilon^{k_1} \bar{v}_r)$ выполнялись условия (6.4′) (при $r > m$, — чтобы выполнялись эти условия для v_r), и так же, как в §§ 2 и 6, находим v_r с помощью метода подбора. v_r еще помножается на сглаживающий множитель $\psi\left(\frac{\rho}{\delta}\right)$.

Наконец, α_r строится так же, как в § 6, с тем, чтобы

$$w_r + \varepsilon^{k_1} \bar{v}_r + \varepsilon\alpha_r$$

удовлетворяли условиям (6.2′) и (6.4′). Построенная функция

$$w_\varepsilon = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon^r w_m + \varepsilon^{k_1} \sum_{r=0}^{m+k_1} \varepsilon^r \bar{v}_r + \varepsilon \sum_{r=0}^{m+k_1} \varepsilon^r \alpha_r$$

удовлетворяет краевым условиям (6.2′), (6.4′). Далее, так как $\|w_0\| = \|u_{i0}\| = 1$, то

$$\|w_\varepsilon\| = 1 + O(\varepsilon). \tag{9.20}$$

В силу наших построений в выражении (9.18) члены при ε^s $(s = 0, 1, \ldots, m)$ равны нулю; поэтому, если обозначить $\mu_{m\varepsilon} = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \mu_s$, то

$$L_\varepsilon w_\varepsilon - \mu_{m\varepsilon} w_\varepsilon = \varepsilon^{m+1} \bar{g}_m, \qquad \|\bar{g}_m\| = O(1). \tag{9.21}$$

Но тогда, в силу леммы 12 и (9.20),

$$\lambda_{i\varepsilon} - \mu_{m\varepsilon} = \varepsilon^{m+1}\delta_{m+1}, \quad |\delta_{m+1}| \leqslant \frac{\|\bar{g}_m\|}{\|w_\varepsilon\|},$$

и мы приходим к формуле (9.16). Пусть $3d = \min(\lambda_{i0} - \lambda_{i-1,0}, \lambda_{i+1,0} - \lambda_{i0})$. При достаточно малом ε

$$\lambda_{i\varepsilon} - \lambda_{i0} \leqslant d, \quad \lambda_{i-1,\varepsilon} - \lambda_{i-1,0} \leqslant d, \quad \lambda_{i+1,\varepsilon} - \lambda_{i+1,0} \leqslant d.$$

Таким образом, на отрезке $[\lambda_{i0} - d, \lambda_{i0} + d]$ заключено единственное собственное значение $\lambda_{i\varepsilon}$ оператора L_ε, которому отвечает единственная нормированная функция $w_{i\varepsilon}$.

Таким образом, T_d^0 (см. стр. 109), отвечающее оператору L_ε и интервалу $[\lambda_{i0} - \delta, \lambda_{i0} + \delta]$, состоит из функций вида $tw_{i\varepsilon}$, $-\infty < t < +\infty$. Фигурирующая в лемме 13 нормированная функция u_0 равна $\pm w_{i\varepsilon}$. Можно именно ее обозначить через $u_{i\varepsilon}$.

В силу (9.21) и леммы 13

$$\left\| u_{i\varepsilon} - \frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|} \right\| \leqslant O(\varepsilon^{m+1}).$$

Отсюда, если положить $\bar{u}_{i\varepsilon} = \|w_\varepsilon\| u_{i\varepsilon}$, имеем, обозначая $\bar{u}_{i\varepsilon} - w_\varepsilon = \varepsilon^{m+1} z_m = z_\varepsilon$, $\|z_m\| = O(1)$. С другой стороны, в силу (9.7), (9.16) и (9.21)

$$\|(L_\varepsilon - \lambda_{i\varepsilon} I) z_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{m+1}) \tag{9.22}$$

и, значит,

$$\|L_\varepsilon z_\varepsilon\| \leqslant \|(L_\varepsilon - \lambda_{i\varepsilon} I) z_\varepsilon\| + |\lambda_{i\varepsilon}| \, \|z_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{m+1}). \tag{9.23}$$

Пользуясь тем, что z_ε удовлетворяют граничным условиям (6.2′), (6.4′), отсюда выводим, что для z_ε имеют место оценки (7.12), (7.13), (7.14). Приходим к следующей теореме.

Теорема 13. *Пусть даны самосопряженные эллиптические операторы* L_{2k_1} *порядка* $2k_1$ *и* $L_\varepsilon = L_{2k_1} + \varepsilon^2 L_{\varepsilon 1}$, $L_{\varepsilon 1} = \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2(j-1)} L_{2(k_1+j)}$ *порядка* $2(k_1 + l_1)$, *причем оператор* L_{2k_1} *при граничных условиях* (6.2′) — *положительно определенный и оператор* $L_{1\varepsilon}$ *при граничных условиях* (6.2′), (6.4′) — *положительный* (*в смысле* (9.8)).

Для i*-го собственного значения* $\lambda_{i\varepsilon}$ *оператора* L_ε *и для соответствующей* i*-й собственной функции* $\bar{u}_{i\varepsilon}$ *этого оператора имеют место следующие асимптотические представления:*

$$\lambda_{i\varepsilon} = \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^j \mu_j + \varepsilon^{m+1}\delta_{m+1}, \quad \mu_0 = \lambda_{i0}, \quad \delta_{m+1} = O(1), \tag{9.24}$$

$$\bar{u}_{i\varepsilon} = \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^j w_j + \sum_{r=0}^{m+k_1} \varepsilon^{r+1} \alpha_r + \sum_{s=0}^{m+k_1} \varepsilon^s v_s + \varepsilon^{m+1} y_m, \tag{9.25}$$

где $\mu_0 = \lambda_{i0}$ — i*-е собственное значение оператора* L_{2k_1}, *которое предполагается простым;* $w_0 = u_{i0}$ — *соответствующая* i*-я собственная функция этого оператора;* w_j *и* μ_j *при* $j \geqslant 1$ *определяются из уравнений вида* (9.19) *при граничных условиях* (6.2′); v_s — *функции типа погранслоя* k*-го порядка, по-*

гашающие невязки в выполнении граничных условий (6.4′) *функциями* w_s, — *определяются из обыкновенных уравнений* (9.19′); $\varepsilon\alpha_r$ *служат для погашения невязок в выполнении функциями* v_r *граничных условий* (6.2′). *Для остаточного члена* $z_m = \varepsilon^{m+1} y_m$ *справедливы оценки* (7.12) — (7.14):

$$\sum_{|i|=1}^{2k_1} \| D^{(i)} z_m \| + \| z_m \| = O(\varepsilon^{m+1}), \qquad \| D^{(2k_1+j)} z_m \| = O(\varepsilon^{m+1-j})$$
$$(0 \leqslant j \leqslant p).$$

Замечание 1. Случай кратного собственного значения рассматривается аналогично тому, как это сделано в [37].

Замечание 2. Если мы хотим написать аналогичное представление для нормированной собственной функции $u_{i\varepsilon} = \frac{1}{\| w_\varepsilon \|} \bar{u}_{i\varepsilon}$, то мы должны найти асимптотическое представление $\frac{1}{\| w_\varepsilon \|}$. Так как $\| w_\varepsilon \| = 1 + O(\varepsilon)$, $\frac{1}{\| w_\varepsilon \|} = 1 + O(\varepsilon)$, то имеет место представление вида

$$\frac{1}{\| w_\varepsilon \|^2} = 1 + \sum_{j=1}^{m} b_j \varepsilon^j + \varepsilon^{m+1} \delta_m. \tag{9.26}$$

Записав w_ε в виде

$$w_\varepsilon = u_{i0} + \sum_{s=1}^{m} \varepsilon^s (w_s + \alpha_{s-1}) + \sum_{s=0}^{m-k_1} \varepsilon^{k_1+s} \bar{v}_s + \varepsilon^{m+1} x_m,$$
$$\| x_m \| = O(1),$$

мы из тождества

$$\frac{1}{\| w_\varepsilon \|^2} (w_\varepsilon, w_\varepsilon) = 1$$

получим:

$$\left(1 + \sum_{j=1}^{m} b_j \varepsilon^j + \delta_m \varepsilon^{m+1}\right)\left(u_{i0} + \sum_{s=1}^{m} \varepsilon^s (w_s + \alpha_{s-1}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=0}^{m-k_1} \varepsilon^{k_1+s} \bar{v}_s + \varepsilon^{m+1} x_m,\ u_{i0} + \sum_{s=1}^{m} \varepsilon^s (w_s + \alpha_{s-1}) + \sum_{s=0}^{m-k_1} \varepsilon^{k_1+s} \bar{v}_s + \varepsilon^{m+1} x_m \right) = 1.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^s $(1 \leqslant s \leqslant m)$, получаем уравнения (мы считаем $b_0 = 1$, $w_0 = u_{i0}$, $(w_0, w_0) = 1$):

$$b_s = -\sum_{j=0}^{s-1} b_j \sum_{r=0}^{s-j} (w_r + \alpha_{r-1} + \bar{v}_{r-k_1},\ w_{s-j-r} + \alpha_{s-j-r-1} + \bar{v}_{s-j-\varepsilon-k_1})$$
$$(\alpha_{-1} = 0,\ v_{-p} = 0,\ p = 1, 2, \ldots).$$

Все числа b_s, таким образом, последовательно находимые, ограничены (относительно ε). И, наконец, беря коэффициент при ε^{m+1}, получим

$$\delta_m = O(1).$$

Зная разложение (9.26) для $\frac{1}{\| w_\varepsilon \|^2}$, уже легко найти аналогичное разложение для $\frac{1}{\| w_\varepsilon \|}$, пользуясь которым находим асимптотику для нормированной собственной функции $u_{i\varepsilon} = \frac{1}{\| w_\varepsilon \|} \bar{u}_{i\varepsilon}$.

§ 10. Асимптотика решений параболических уравнений с вырождающейся эллиптической частью

Решение смешанной задачи для параболического уравнения стремится при $t \to \infty$ к решению соответствующей краевой задачи для эллиптического уравнения ([26], [27]). В заметках авторов [40], [41] исследовался случай, когда эллиптическая часть параболического оператора вырождается при $t \to +\infty$ в оператор первого порядка. Именно наряду с решением $Z_t(x) = Z(t, x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, параболического уравнения

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + L_\varepsilon Z = h, \quad Z|_\Gamma = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty, \tag{10.1}$$

в цилиндрической области $Q \times (0 < t < +\infty)$ при произвольных начальных условиях из $\mathscr{L}_2$ рассматривалось семейство решений $u_{\varepsilon(t)}(x)$ эллиптических уравнений

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = h, \quad u_\varepsilon|_\Gamma = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon(t) \tag{10.2}$$

и приводились достаточные условия для того, чтобы в той или иной метрике $Z_t(x) - u_{\varepsilon(t)}(x)$ стремилось к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поскольку в этих заметках проведены доказательства, мы не будем повторять их содержания.

Сохраним обозначения §§ 4 и 5: $L_\varepsilon \equiv L_1 + \varepsilon L_2$, $L_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} - fu$, $f = f(x) > 0$ на $\overline{Q}$, L_2 — эллиптический оператор 2-го порядка. Из результатов заметки [41] и §§ 4—5 следует:

Теорема 14. а) *Если $\varepsilon(t) = O(t^{-r})$, $\varepsilon'(t) = O(t^{-r-1})$, где $0 < r < 2$, то $\|Z_t(x) - w_0(x)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, где w_0 — решение вырожденного уравнения 1-го порядка*

$$L_1 w_0 = h, \quad w_0|_{\Gamma^+} = 0. \tag{10.3}$$

б) *Если $\varepsilon(t) = O(t^{-r})$, $\varepsilon'(t) = O(t^{-r-1})$, где при $n = 1$, $0 < r < 1$, а при $n = 2, 3$, $0 < r < \frac{1}{2}$, то имеет место представление*

$$Z_t = w_0 + v_\varepsilon + P_{0,t}, \quad \varepsilon = \varepsilon(t), \tag{10.4}$$

где w_0 — решение вырожденной задачи (10.3), $v_\varepsilon = (v_0 + \varepsilon v_1)\psi\left(\frac{\rho}{\delta}\right)$ (см. теорему 7) — функция типа погранслоя в окрестности Γ^-, $P_{0t}(x)$ при $t \to \infty$ равномерно стремится к нулю (теорема справедлива в пространстве числа измерений $n \leqslant 3$).

В условиях п. а) теоремы, в силу теоремы 1 из [41], $\|Z_t - u_{\varepsilon(t)}\| \to 0$ при $t \to \infty$. Далее, из теоремы 8 § 4 следует: $\|u_\varepsilon - w_0 - v_\varepsilon\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где $v_\varepsilon = v_0 \psi\left(\frac{\rho}{\delta}\right)$. Отсюда $\|Z_t - w_0\| = \|Z_t - u_{\varepsilon(t)} + (u_{\varepsilon(t)} - w_0 - v_\varepsilon) + v_\varepsilon\| \to 0$, так как $\|v_\varepsilon\| = O(\sqrt{\varepsilon})$.

В условиях б) теоремы, в силу теоремы 2 из [41], $w_t - u_{\varepsilon(t)}$ равномерно на $\overline{Q}$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Далее, в этих условиях из теоремы 5 § 4 следует: $u_\varepsilon - w_0 - v_\varepsilon$ $\left(\text{где } v_\varepsilon = (v_0 + \varepsilon v_1)\psi\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)$ равномерно на $\overline{Q}$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ (при $\varepsilon = \varepsilon(t)$, когда $t \to \infty$). Значит,

$P_{0t} = Z_t - w_0 - v_\varepsilon = Z_t - u_\varepsilon + (u_\varepsilon - w_0 - v_\varepsilon)$, где $\varepsilon = \varepsilon(t)$, равномерно на $\overline{Q}$ стремится к 0 при $t \to \infty$.

Докажем сейчас аналог первой части теоремы 6. Пусть $\mathfrak{D}$ — множество точек, где характеристики оператора L_1 касаются Γ (при $n=2$ $\mathfrak{D}$ состоит из двух точек A и B), $U(\mathfrak{D})$ — произвольная окрестность $\mathfrak{D}$. Для простоты ограничимся случаем, когда $h(x)=0$ на $U(\mathfrak{D})$. Тогда при достаточной гладкости h решение w_0 задачи (10.3) будет гладко во всей области $\overline{Q}$.

Теорема 15. *Если* $\varepsilon(t) = O(t^{-r})$, $t = O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{r}}\right)$, $\varepsilon'(t) = O(t^{-r-1})$, *где* $0 < r \leqslant \dfrac{1}{m+\frac{1}{2}}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, *и если коэффициенты уравнения* (10.2), *правая часть* h *и граница* Γ $2(m+1)$ *раз дифференцируемы, причем* $h=0$ *вблизи* $\mathfrak{D}$, *то в* Q *имеет место представление*

$$Z(x,t) = (w_0 + \varepsilon w_1 + \ldots + \varepsilon^m w_m) + (v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^{m+1} v_{m+1}) + P_{m,t}. \tag{10.5}$$

Здесь w_0 — *решение вырожденной задачи* (10.3), w_i — *последовательно полученные решения задач вида* (4.33) (4.34); v_0, v_1, … — *функции типа погранслоя в окрестности* Γ^-, *последовательно получаемые решением обыкновенных уравнений вида* (4.32), (4.35) *с постоянными коэффициентами*[1]; $\|P_{m,t}\| = O(\varepsilon^{m+1})$.

Заметим прежде всего, что

$$\left\|\frac{\partial v_0}{\partial t}\right\| = O\left(|\varepsilon'|\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right), \ \ldots, \ \left\|\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^j v_j)\right\| = O\left(|\varepsilon'|\,\varepsilon^{j-\frac{1}{2}}\right). \tag{10.6}$$

В самом деле, если $P_k(t)$ — многочлен k-й степени, то при $\lambda > 0$ $\left\{\int\limits_0^\infty [P_k(t)\,e^{-\lambda\tau}]^2\,d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} = c(k,\lambda) < \infty$. Отсюда

$$\left\{\int\limits_0^\infty \left[P_k\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda\frac{\rho}{\varepsilon}}\right]^2 d\rho\right\}^{\frac{1}{2}} = c(k,\lambda)\,\varepsilon^{\frac{1}{2}} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right). \tag{10.7}$$

Далее:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon^j(t)\,P_k\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda\frac{\rho}{\varepsilon}}\right] = \varepsilon'(t)\,\varepsilon^{j-1}\left[jP_k\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) - \frac{\rho}{\varepsilon}P_k'\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda\rho}{\varepsilon}P_k\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)\right]e^{-\frac{\lambda\rho}{\varepsilon}} = \varepsilon'\varepsilon^{j-1}P_{k+1}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)e^{-\frac{\lambda\rho}{\varepsilon}}. \tag{10.8}$$

Здесь $P_{k+1}(\tau) = jP_k(\tau) - \tau P_k'(\tau) + \lambda\tau P_k(\tau)$. Из (10.7) и (10.8) следует:

$$\left\{\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon(t)^j P_k\left(\frac{\rho}{\varepsilon(t)}\right)\exp\left(-\frac{\lambda\rho}{\varepsilon(t)}\right)\right]^2 d\rho\right\}^{\frac{1}{2}} = O\left(|\varepsilon'|\,\varepsilon^{j-\frac{1}{2}}\right). \tag{10.9}$$

Вспомнив структуру функций v_j, мы из (10.9) получим (10.6).

---

[1]) Выражения для v_i — такие же, как в § 4, только сейчас всюду вместо ε следует подставить $\varepsilon(t)$. В силу наших предположений относительно h функции v_i и w_i равны нулю вблизи $\mathfrak{D}$.

Но тогда

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{s=0}^{m+1} \varepsilon^s v_s \right)\right\| = O\left(|\varepsilon'| \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{10.10}$$

Далее,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s w_s \right)\right\| = O(|\varepsilon'|). \tag{10.11}$$

Обозначим:

$$\widetilde{u}_m = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s w_s + \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^j v_j.$$

Тогда имеем:

$$\left\| \frac{\partial \widetilde{u}_m}{\partial t} \right\| = O\left(|\varepsilon'| \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{10.12}$$

С другой стороны, в силу теоремы 4 § 4,

$$L_\varepsilon \widetilde{u}_m = h + g_{m,t}\, \varepsilon^{m+1}, \quad \| g_{m,t} \| = O(1). \tag{10.13}$$

Если $0 < r < \dfrac{1}{m+\frac{1}{2}}$, то в силу условий теоремы

$$|\varepsilon'| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} = O\left(t^{-r-1+\frac{r}{2}}\right) = O\left(t^{-\frac{r}{2}-1}\right) = O\left[\left(\varepsilon^{-\frac{1}{r}}\right)^{-\frac{r}{2}-1}\right] = O(\varepsilon^{m+1}). \tag{10.14}$$

Тогда из (10.12), (10.13) и (10.14) следует:

$$\frac{\partial \widetilde{u}_m}{\partial t} + L_\varepsilon \widetilde{u}_m = h + \widetilde{g}_{m,t}, \quad \| \widetilde{g}_{m,t} \| = O(\varepsilon^{m+1}) = O(t^{-\gamma}), \ \gamma = r(m+1). \tag{10.15}$$

Почленным вычитанием (10.15) из (10.1) получаем, обозначая

$$P_{m,t} = Z_t - \widetilde{u}_m = Z_t - \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s w_s - \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^j v_j, \tag{10.16}$$

$$\frac{\partial P_{m,t}}{\partial t} + L_\varepsilon P_{m,t} = -\widetilde{g}_m. \tag{10.16'}$$

Отсюда следует:

$$\| P_{m,t} \| = O(\varepsilon^{m+1}) = O(t^{-\gamma}), \quad \gamma = r(m+1). \tag{10.17}$$

В самом деле, умножим скалярно обе части (10.16′) на $P_{m,t}$ и обозначим: $\| P_{m,t} \| = \alpha(t)$. Тогда:

$$\left(\frac{\partial P_{m,t}}{\partial t},\ P_{m,t} \right) = \frac{1}{2} \| P_{m,t} \|^2 = \frac{1}{2} \frac{d\alpha^2(t)}{dt} = \frac{1}{2} \alpha'(t)\, \alpha(t);$$

$$(L_\varepsilon P_{m,t},\ P_{m,t}) \geqslant \| P_{m,t} \|^2 \cdot C = \alpha^2(t)\, C;$$

$$|(\widetilde{g}_{m,t},\ P_{m,t})| \leqslant \| g_{m,t} \| \cdot \| P_{m,t} \| = O(t^{-\gamma})\, \alpha(t),$$

и, следовательно,

$$\alpha'(t) + C\alpha(t) \leqslant C_1 t^{-\gamma}.$$

Поэтому

$$0 \leqslant \alpha(t) \leqslant \alpha(t_0)\, e^{-C(t-t_0)} + C_1 \int_{t_0}^{t} \tau^{-\gamma} e^{-C(t-\tau)}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(t_0)\, e^{-C(t-t_0)} + C e^{-\frac{t}{2}} \int_{t_0}^{\frac{t}{2}} \tau^{-\gamma}\, d\tau + C_1 \left(\frac{t}{2}\right)^{-\gamma} \int_{\frac{t}{2}}^{t} e^{-C(t-\tau)}\, d\tau = O(t^{-\gamma}).$$

Итак,

$$\| P_{m,t} \| = O(t^{-\gamma}) = O(t^{-r(m+1)}) = O(\varepsilon^{m+1}).$$

Отсюда и из (10.16) следует наша теорема. Можно получить также оценки производных невязки $P_{m,t}$, соответствующие оценкам теоремы 4 § 4.

Аналогичные асимптотики получаются для случая, когда L_ε — эллиптический оператор более высокого порядка, регулярно вырождающийся в оператор более низкого порядка в условиях теорем §§ 7 и 8.

Некоторые вопросы и задачи

Сформулируем в заключение некоторые задачи и вопросы, естественно возникающие из предыдущего и пока не решенные.

1. В настоящей статье введено и систематически использовано понятие регулярного вырождения для случая, когда погранслой строится с помощью обыкновенного дифференциального уравнения. В случае, когда часть границы является характеристическим многообразием одного из дифференциальных операторов L_ε или L_h, как мы видели в §§ 4, 6, 8, для построения погранслоя приходится употреблять некоторые уравнения в частных производных (в частности, получается параболический погранслой). Возникает вопрос о распространении понятия регулярного вырождения и на этот случай. Нам кажется, что с помощью трансформации Фурье по «граничным» координатам φ_i можно свести этот случай к изучению обыкновенного уравнения по трансверсальному направлению ρ и расположения корней его характеристического уравнения (см. п. 4 § 6).

2. Желательно провести исследование асимптотики решений u_ε вблизи точек касания с границей Γ характеристик операторов L_ε и L_h. В § 4 мы встретились с точками A и B касания. Нам представляется, что этот случай является в известном смысле предельным для случая, рассмотренного в п. 5 § 4, где часть границы совпадает с характеристикой $y = c$. Было бы интересно построить и в предельном случае точек касания A и B в их окрестностях «параболический» погранслой. Такие погранслои могли бы дать более точную асимптотику в этом случае. Такой же вопрос возникает и для уравнений высших порядков с вещественными характеристиками.

3. С вопросом 2 связан более общий вопрос о склеивании погранслоев, которые на разных частях границы определяются по-разному (и, в частности, на некоторых частях границы превращаются в тождественный нуль) (см. п. 3 § 6).

4. Естественно возникает вопрос о полном исследовании вопросов существования и дифференциальных свойств решений хотя бы первых

краевых задач для однохарактеристических уравнений, которые позволили бы придать предложениям § 8 такую же формулировку, как предложениям § 7.

5. Следовало бы исследовать, когда из условий 1) разрешимости предельной задачи A_0, 2) регулярности вырождения (в алгебраическом смысле) задачи A_ε в A_0 вытекает условие 3) — равномерная разрешимость задач A_ε. [В настоящей статье мы обычно приводили в качестве достаточных условий для одновременного выполнения условий 1), 2) и 3) позитивность оператора вырожденной задачи (при $\varepsilon = 0$) и положительность вещественной части алгебраической формы вида (7.4).]

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Friedrichs, Asymptotic phenomena in mathematical physics, Bull. Amer. Math. Soc. 61, 6 (1955), 485—504 (перевод см.: Матем. 1 : 2 (1957), 79—94).

[2] G. D. Birkhoff, On the asymptotic character in the solutions of certain linear differential equations containing a parameter, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), 219—231.

[3] P. Noaillon, Developpements asymptotiques dans les equations différentialles lineaires a parametre variable, Memoires de la Soc. des Sci. de Liege 3, 11 (1912), 197.

[4] W. J. Trjitzinsky, Theory of linear differential equations containing a parameter, Acta Math. 67 (1936), 1—50.

[5] H. L. Turritin, Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary lineary differential equations containing a parameter, Contributions to the theory of nonlineary oscillations, v. II, Princeton, 1952 (перевод см.: Матем. 1 : 2 (1957), 29—59).

[6] А. Б. Васильева, О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры, Матем. сб. 31 (73) : 3 (1952), 586—649.

[7] И. С. Градштейн, Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малыми параметрами при старших производных, Матем. сб. 27 (69) (1950), 47—68.

[8] А. Н. Тихонов, Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, Матем. сб. 31 (73) : 3 (1952), 575—586.

[9] В. П. Маслов, Теория возмущений операторных уравнений и проблема малого параметра в дифференциальных уравнениях, ДАН 111, № 3 (1956), 531—534.

[10] М. А. Леонтович и В. А. Фок, Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения, Исследования по распространению радиоволн, Сб. 2, Изд. АН, 1948, стр. 13—39.

[11] В. А. Фок, Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела, Изв. АН, сер. физ. 10, № 2 (1946), 171—186.

[12] А. А. Гольденвейзер, Тонкие упругие оболочки, М., Гостехиздат, 1953.

[13] W. Wasow, Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation $\Delta u + \lambda \frac{\partial}{\partial x} u = \lambda f(x, y)$, Duke Journ. 11 (1944), 405—415.

[14] N. Levinson, The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = D(x, y)$ for small ε, Ann. of Math. 51, 2 (1950), 428.

[15] С. Л. Каменомостская, Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа с малым параметром при старших производных, Изв. АН 19, 3 (1956), 605.

[16] О. А. Олейник, О второй краевой задаче для уравнений эллиптического типа с малым параметром при старших производных, ДАН 79, № 5 (1951), 735.

[17] О. А. Олейник, Об уравнениях эллиптического типа с малым параметром при старших производных, Матем. сб. 31, № 1 (1952), 104—117.

[18] О. А. Олейник, О краевых задачах для уравнений с малым параметром при старших производных, ДАН 85, № 3 (1952), 493.

[19] R. B. Davis, Asymptotic solutions of the first boundary value problem for a four-order elliptic partial differential equation, Journ. Rat. Mech. a. An. 5, № 3 (1956), 605—620.

[20] И. С. Градштейн, Задача Коши и асимптотические ряды для решения систем дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных, Труды Третьего Всесоюзного матем. съезда 1 (1956), 50—51.

[21] Б. Н. Понайоти, О задаче Коши для линейных дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих малый параметр, Труды Ин-та физ. и матем. АН АзССР, сер. матем. 7 (1955), 110—128.

[22] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.

[23] F. E. Browder, The Dirichlet problem for linear elliptic equations, of arbitrary even order with variable coefficients, Proc. Nat. Acad. sci., USA 38 (1952), 230—235.

[24] F. E. Browder, Strongly elliptic systems of differential equations, Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Ann. of Math. Studics 33 (1954).

[25] М. И. Вишик, Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений, Матем. сб. 25 (1949), 189—234.

[26] М. И. Вишик, О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сб. 29 (1951), 615—676.

[27] М. И. Вишик, Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения, Матем. сб. 39 (81): 1 (1956), 50—148.

[28] L. Gårding, Le problème de Dirichlet pour les équations aux derivées partielles elliptiques linéaires dans les domaines bornées, Compt. Rend. Acad. Sci (Paris) 233 (1951), 1554—1556.

[29] L. Gårding, Dirichlet's probleme for linear elliptic partial differential equations, Math. Scandinavica 1 (1953), 55—72.

[30] K. Friedrichs, On the Differentiability of the Solutions of Linear Elliptic Differential Equations, Comm Pure. Appl. Math. 6, 3 (1953), 299—326.

[31] С. Н. Бернштейн, Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа, Сообщения Харьк. Матем. об-ва (1908), 1—163 (см. стр. 82—84; 116—118).

[32] S. Bernstein, Sur la generalisation du probleme de Dirichlet, Math. Ann. 69 (1910) (см. стр. 94—98).

[33] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., Гостехиздат, 1953.

[34] О. А. Ладыженская, Простое доказательство разрешимости краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений, Вестник ЛГУ, № 11 (1955), 23—29.

[35] В. Б. Гласко, Некоторые задачи о собственных значениях, содержащие малый параметр, ДАН 108, № 5 (1956), 767—769.

[36] В. Н. Гольдберг, О возмущении линейных операторов с чисто дискретным спектром, ДАН 115, № 4 (1957).

[37] Л. А. Люстерник, О разностных апроксимациях оператора Лапласа, УМН IX, вып. 2 (1954), 3—66 (стр. 62, лемма 41).

[38] В. П. Маслов, Теория возмущений при переходе от дискретного спектра к непрерывному, ДАН 109, № 2 (1956), 267—270.

[39] В. П. Маслов, Метод теории возмущений для отыскания спектра обыкновенных дифференциальных операторов с малым параметром при старшей производной, ДАН 111, № 5 (1956), 977—980.

[40] М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, Стабилизация решений некоторых дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, ДАН 111, № 1 (1956), 12—15.

[41] М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, Стабилизация решений параболических уравнений, ДАН 111, № 2 (1956), 273—275.

[42] М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, Об эллиптических уравнениях, содержащих малые параметры при производных, ДАН **113**, № 4 (1957).

[43] М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, О некоторых эллиптических уравнениях четного порядка, содержащих малые параметры при старших производных, вырождающихся в уравнения первого (и вообще нечетного) порядка, ДАН **113**, № 5 (1957).

[44] О. В. Гусева, О краевых задачах для сильно эллиптических систем, ДАН **102**, № 6 (1955), 1069—1072.

[45] L. Nirenberg, Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 648—674.

[46] А. И. Кошелев, Об ограниченности в L_p производных решений эллиптических дифференциальных уравнений, Матем. сб. **38** (80): 3 (1956), 359—372.

[47] А. И. Кошелев, Об ограниченности в L_p производных решений эллиптических уравнений и систем, ДАН **110**, № 3 (1956), 323—325.

[48] L. Nirenberg, Estimates and existeme of solutions of elliptic equations, Comm. of Pure and Appl. Math. 9 (1956), 509—530.

[49] М. И. Вишик и О. А. Ладыженская, Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, УМН **XI**, вып. 6 (1956), 41—97.

[50] P. D. Lax, On Cauchy s problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, Comm, Pure Appl. Math. 8 (1955), 615—633.

[51] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., Гостехиздат, 1953.

[52] Carrier, Boundary layer problems in applied mechanics Advances in Appl. Mech 3 (1953), 1—19.

[53] О. А. Ладыженская, Об уравнениях с малым параметром при старших про изводных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными, Вестник ЛГУ, № 7, вып. 2 (1957), 104—120.